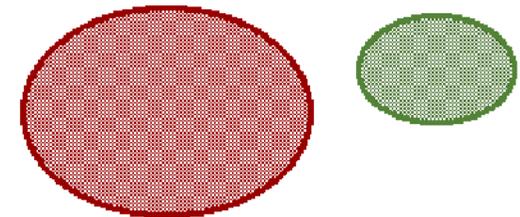
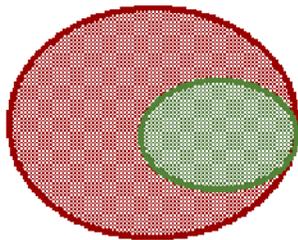
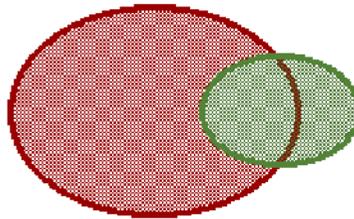
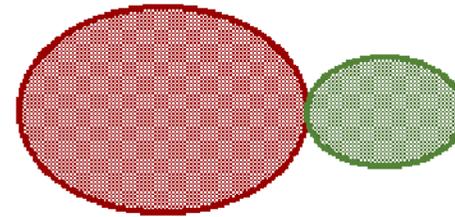
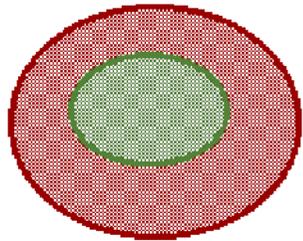


Lernmodul 2 **Topologie**



Topologie **Übersicht**

- Topologie - Allgemeines
- Punktmengentopologie
 - Nachbarschaft
 - Beispiele zur Nachbarschaft
 - Nähe, offene/geschlossene Menge
 - Abschluß, Inneres, Grenze
 - Zusammenhang
 - topologische Transformationen
 - Regularisierung
 - topologische Relationen (Egenhofer)
- Algebraische Topologie
 - Simplizes
 - Teilsimplizes
 - Simpliziale Komplexe

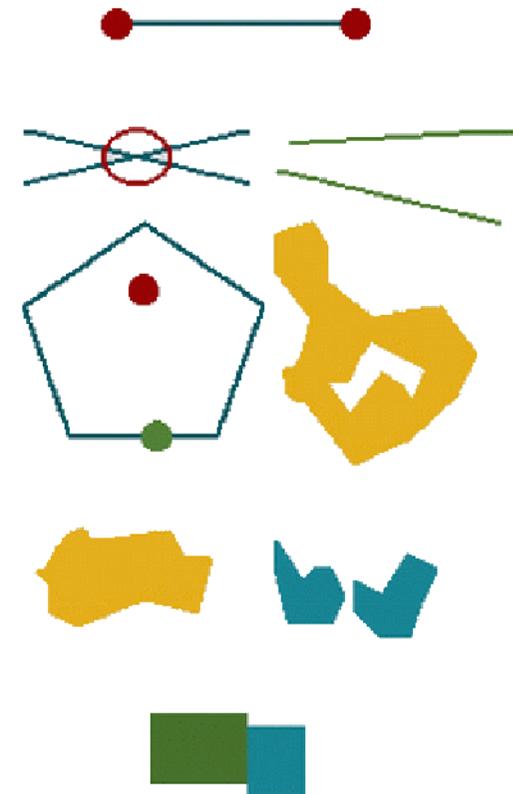


Topologie Motivation

- Die quantitative Beschreibung räumlicher Zusammenhänge (im Euklidischen Raum) ist Aufgabe der Vermessungskunde
- Räumliche Modellierungen müssen ebenso bestimmten strukturellen -topologischen- Zusammenhängen genügen (Beispiel: Sind zwei Grundstücke benachbart?)



Wir betrachten die grundlegenden Konzepte der Topologie bzw. topologischer Räume



Topologie **Allgemeines**

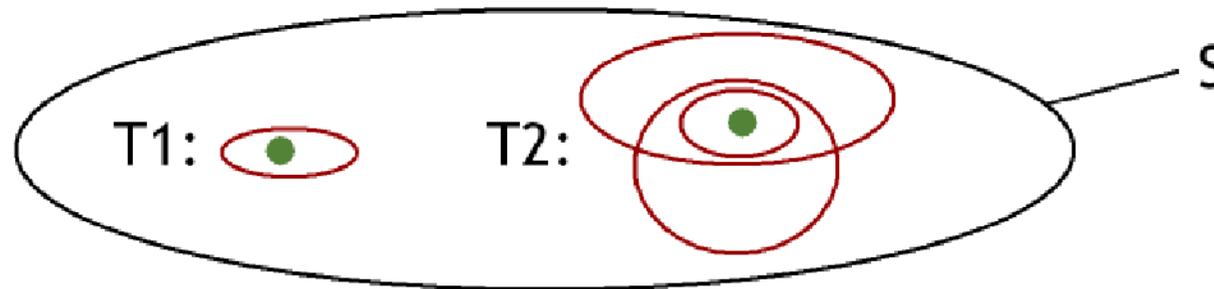
Wir unterscheiden zwei Ansätze der Topologie:

- **Punktmengentopologie** (analytische Topologie)
 - Definition des topologischen Raumes durch das Konzept der Nachbarschaft auf einer Menge von Punkten
 - Alle topologischen Eigenschaften lassen sich auf Nachbarschaft zurückführen
 - Räumliche Beziehungen (Verbundenheit, Grenze, ...) lassen sich durch die Terminologie der Punktmengentopologie ausdrücken
- **Algebraische Topologie** (geometrische Topologie)
 - Theorie der simplizialen Komplexe: Mosaikzerlegung der Objekte in strukturell gleich gebaute Primitive



Punktmengentopologie **Topologischer Raum**

- **Gegeben:** Eine Menge S und die Menge aller Teilmengen von S (die Potenzmenge $P(S)$)
- Ein **topologischer Raum** besteht aus einer Menge S und einer Menge von Teilmengen von S (nicht notwendig aller), den **Nachbarschaften**. Dabei gilt:
 - T1:** Jeder **Punkt** $p \in S$ liegt in einer **Nachbarschaft** von S .
 - T2:** Der Durchschnitt zweier Nachbarschaften eines **Punktes** $p \in S$ enthält eine **Nachbarschaft** von p .



Punktmentopologie **Beispiel I**

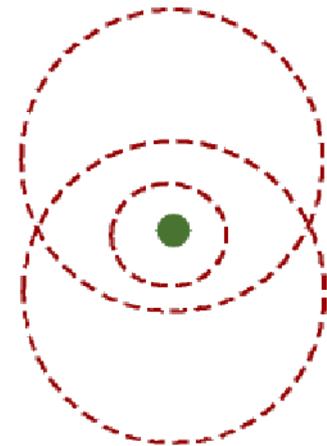
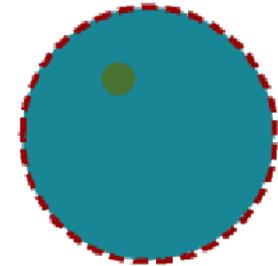
Die Nachbarschaft sei eine **offene Kreisscheibe** in der euklidischen Ebene ($S = \mathbb{R}^2$)

offene Kreisscheibe: Menge aller Punkte, die durch einen Kreis begrenzt werden, aber nicht auf demselben liegen

- punktierte Linie: offen
- durchgezogene Linie: geschlossen

\mathbb{R}^2 ist ein topologischer Raum:

- T1 ist erfüllt: Jeder Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ hat eine offene Kreisscheibe als Nachbarschaft
- T2 ist erfüllt: Der Durchschnitt zweier Nachbarschaften eines $p \in \mathbb{R}^2$ enthält eine Nachbarschaft von p .



Punktmengentopologie **Beispiele II - V**

- Die **diskrete** Topologie einer Punktmenge S :
 - Nachbarschaften sind S und die Menge aller Teilmengen von S
 - T_1 und T_2 sind erfüllt
 - die kleinste Nachbarschaft von $p \in S$ ist $\{p\}$
(„Einzimmerapartment“, daher der Name „diskret“)
- Die **indiskrete** Topologie
 - S selbst ist die einzige Nachbarschaft von S
 - T_1 und T_2 sind erfüllt
- Euklidische Räume aller Dimensionen; T_1 und T_2 sind z.B. erfüllt für
 - die **offenen Intervalle** (a,b) in der Menge $S = \mathbb{R}$ der reellen Zahlen als Nachbarschaften
 - die **offenen Kugeln** in $S = \mathbb{R}^3$ als Nachbarschaften



Punktmengentopologie **Beispiel VI**

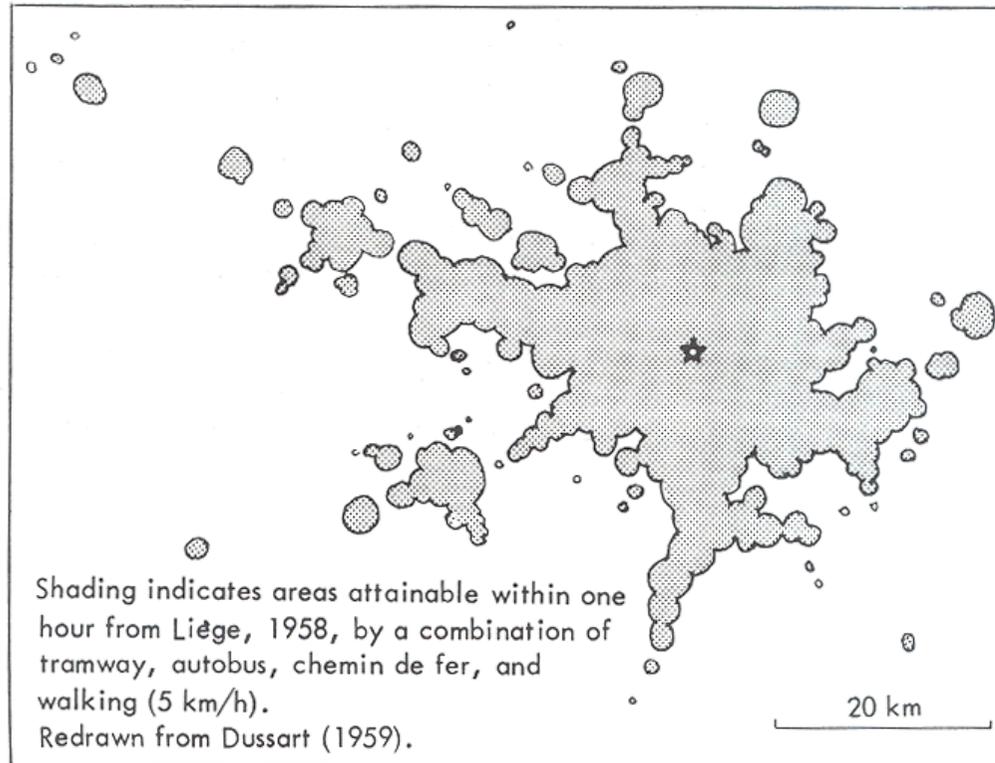
Fahrtzeittopologie

- Gegeben sei ein Gebiet, das durch ein Verkehrsnetz erschlossen ist. S sei die Menge aller Punkte des Gebiets.
- Sei $\delta(p, q)$ die **Fahrtzeit** auf der kürzesten Verbindung zwischen p und q .
- Annahme: Für alle $p, q \in S$ gilt: $\delta(p, q) = \delta(q, p)$
 - Symmetrie, keine Einbahnstraßen
- **t-Zone**: die Menge aller Punkte, die von einem Ausgangspunkt aus in weniger als t Minuten erreichbar ist
- S mit der Menge aller t -Zonen (für jeden Punkt!) ist eine Topologie.



Punktmengentopologie **Abbildung zu Beispiel VI**

Liège : the One - Hour Isochrone



Ein-Stunden-Zone
um Liège

Quelle: Worboys (1995)



Punktmengentopologie **Wo sind wir?**

Wir haben den Begriff der "**Nachbarschaft**" definiert

Jetzt kommen mehrere auf den ersten Blick recht abstrakte Definitionen - alle beruhen auf dem Konzept der Nachbarschaft

Zielbegriff: Der Rand oder die Grenze

Teilziel: Offene und geschlossene Flächen

Im folgenden gilt stets:

- S sei ein topologischer Raum
- $X \subseteq S$; $p, q \in S$



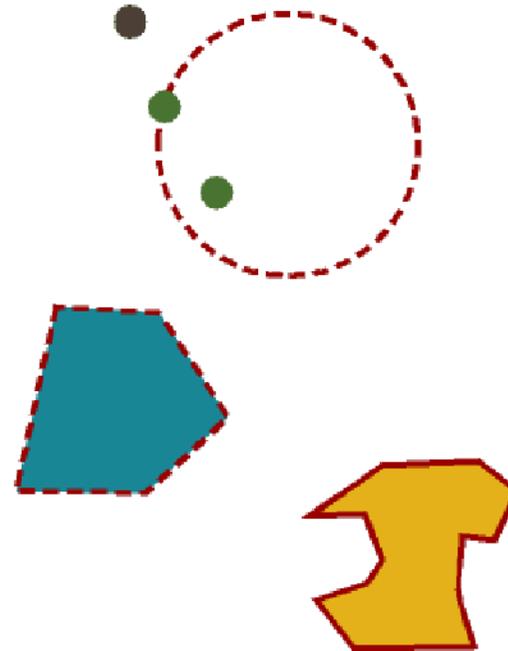
Punktmengentopologie Nähe, Offen, Geschlossen

p ist **nahe** an X , falls jede Nachbarschaft von p einen Punkt von X enthält.

Beispiel: $C = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ sei die offene Kreisscheibe um den Ursprung mit Radius 1.

X ist **offen**, wenn jeder Punkt q eine Nachbarschaft hat, die ganz in X ist.

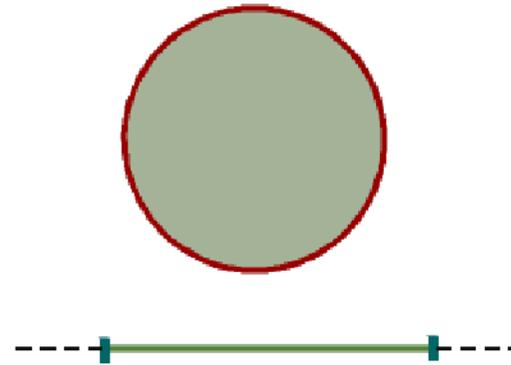
X ist **geschlossen**, wenn X alle nahen Punkte enthält.



Punktmengentopologie **Wichtige nahe Punkte**

Interessant sind die nahen Punkte, die nahe an X sind ohne zu X zu gehören

- bei der offenen Kreisscheibe die **Punkte des Kreises**
- beim offenen Intervall die **Zahlen a, b**



Sie werden sehen, dass der Begriff der Grenze auf dem Begriff der Nähe aufbaut.



Punktmengentopologie **Abschluß, Inneres, Grenze**

Der **Abschluß** von X ist die Vereinigung von X mit allen nahen Punkten.

Notation: X^-

Beispiel: **geschlossene** Kreisscheibe

$$C^- = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Komplement von X : X'

Das **Innere** von X ist die Menge aller Punkte von X , die nicht zugleich nahe Punkte von X' sind.

Notation: X°

Die **Grenze** (oder der **Rand**) von X ist die Menge aller Punkte, die nahe zu X und zugleich zu X' sind.

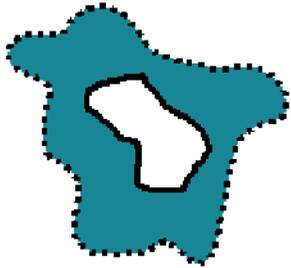
Notation: δX

Es gilt: $\delta X = X^- \setminus X^\circ$
(mengentheor. Differenz)

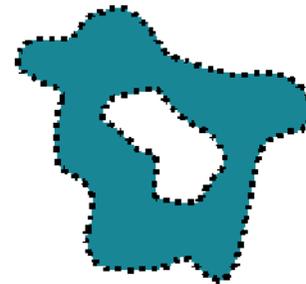
Der "Rand" einer Kreisscheibe ist der Kreis (wie zu erwarten)



Punktmengentopologie Beispiele "Inneres", ...



Die Menge S



Das Innere von S



Abschluß von S



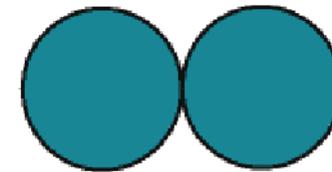
Rand von S



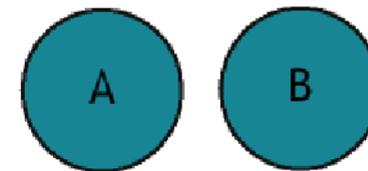
Punktmengentopologie Zusammenhang

Ein Punktmenge X heißt **zusammenhängend**, wenn für jede Partition (disjunkte Zerlegung) in nichtleere Teilmengen A und B gilt: Entweder enthält A einen Punkt nahe an B oder B enthält einen Punkt nahe an A oder beides.

zusammenhängend



nicht zusammenhängend



Punktmengentopologie **Diskret und indiskret**

Übung 1:

Zeigen Sie:

In der diskreten Topologie ist jede nichtleere Menge X **gleichzeitig offen und geschlossen**.

Übung 2:

Zeigen Sie:

In der indiskreten Topologie ist jede Menge X , die nicht leer und nicht gleich S ist, **weder offen noch geschlossen**.



Punktmengentopologie **Topologische Abbildung**

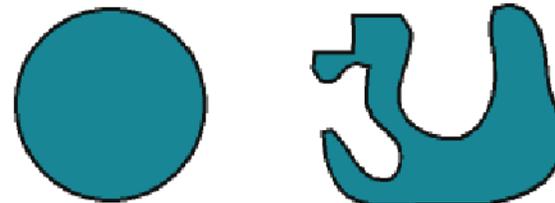
Eine topologische Transformation (**Homeomorphismus**) ist ein **>>Isomorphismus**, der Nachbarschaften auf Nachbarschaften abbildet.

Ausgangs- und Zielmenge einer topologischen Transformation sind **topologisch äquivalent**

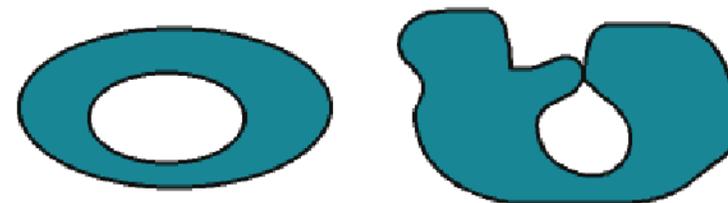
Topologische Eigenschaften sind die Invarianten topologischer Abbildungen.

Beispiel: Topologie des \mathbb{R}^2

äquivalent



nicht äquivalent



Punktmengentopologie **Isomorphismus**

Ein Isomorphismus ist eine verknüpfungstreue, **bijektive** Abbildung:

Wenn **A** verknüpft **B** gleich **C**, dann ist **f(A)** verknüpft **f(B)** gleich **f(C)**.

Beispiel: Wenn $A \cap B = C$, dann $f(A) \cap f(B) = f(C)$

Sei f eine Funktion von X nach Y . $f: X \rightarrow Y$

f ist **bijektiv**, wenn sie **injektiv** und **surjektiv** ist.

f ist **injektiv**, wenn für alle y aus Y **höchstens** ein x aus X mit $f(x) = y$ existiert.

f ist **surjektiv**, wenn für alle y aus Y **mindestens** ein x aus X mit $f(x) = y$ existiert.

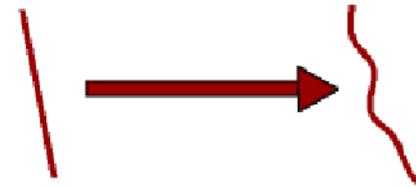


Punktmengentopologie **Pfadzusammenhang**

Ein **Pfad** ist ein homeomorphes Bild einer geraden Kante.

Eine Menge X eines topologischen Raumes heißt **(pfad-) zusammenhängend**, wenn jedes Paar von Punkten durch einen Pfad verbunden werden kann, der ganz in X liegt.

elastische Verformung



Pfadzusammenhang



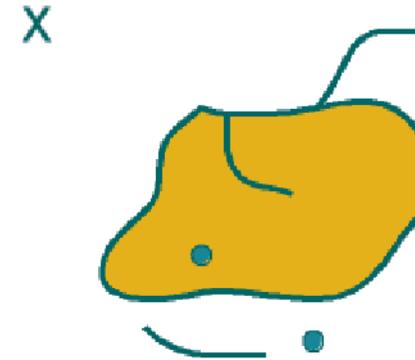
Punktmengentopologie Regularisierung

X sei eine Punktmenge der Euklidischen Ebene mit der Standardtopologie (offene Kreisscheiben).

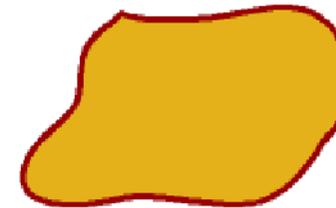
Die **Regularisierung** von X ist der Abschluß ($-$) des Inneren ($^\circ$) von X :

$$\text{reg}(X) = X^\circ -$$

Ergebnis ist ein **rein flächenhaftes Objekt** (ohne Beimengung von Punkten und Linien, die nicht zur Flächenbildung beitragen)

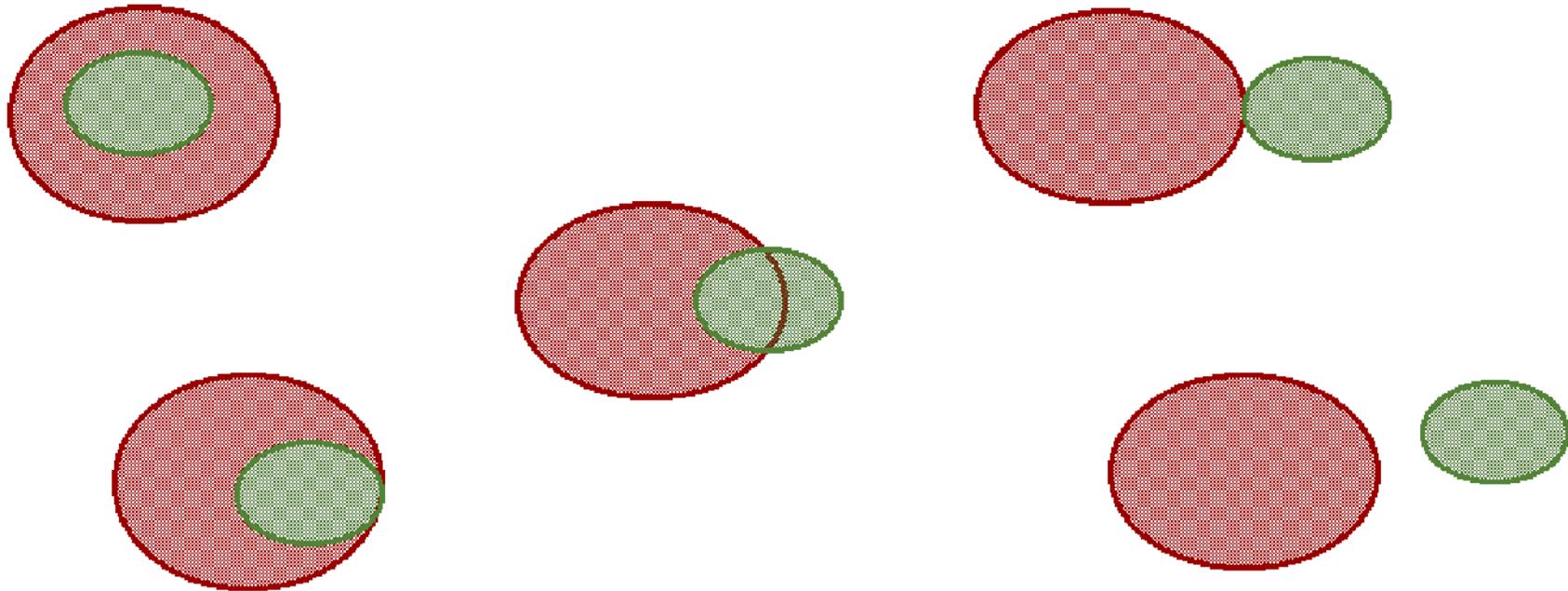


reg(X)



Punktmengentopologie **Topologische Relationen**

Topologische Relationen nach Egenhofer



Topologische Relationen **Problemstellung**

Gesucht: Beziehung zwischen zwei Punktmengen X und Y (schneiden sich X und Y , liegt X in Y , usw.)

Gegeben: Rand und Inneres beider Mengen ($\partial X / \partial Y$ bzw. X° / Y°)

Lösung: Wir bringen jeweils den Rand bzw. das Innere von X mit dem Rand und dem Inneren von Y zum Schnitt und betrachten die Schnittmengen

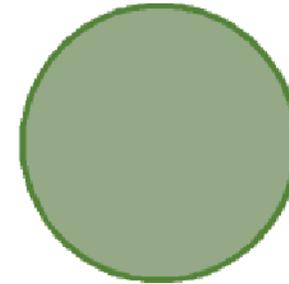
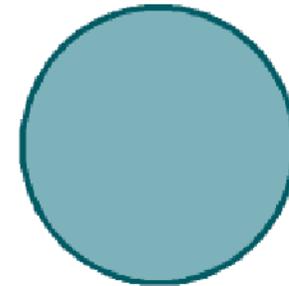


Topologische Relationen **X disjunkt Y**

$\partial X \cap \partial Y$ $X^\circ \cap Y^\circ$ $\partial X \cap Y^\circ$ $X^\circ \cap \partial Y$

Operation

X disjunkt Y



X disjunkt **Y**



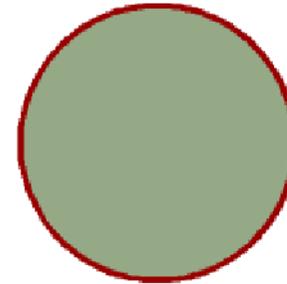
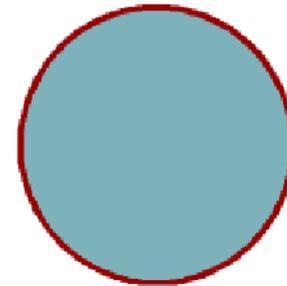
Topologische Relationen **X disjunkt Y**

$\partial X \cap \partial Y$ $X^\circ \cap Y^\circ$ $\partial X \cap Y^\circ$ $X^\circ \cap \partial Y$

\emptyset

Operation

X disjunkt Y



X disjunkt **Y**



Topologische Relationen **X disjunkt Y**

$$\partial X \cap \partial Y$$

$$X^\circ \cap Y^\circ$$

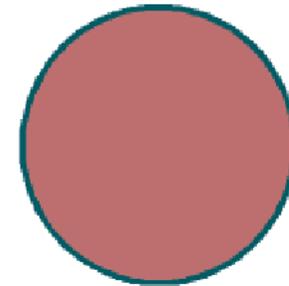
$$\partial X \cap Y^\circ$$

$$X^\circ \cap \partial Y$$

 \emptyset \emptyset

Operation

X disjunkt Y

**X** disjunkt **Y**

Topologische Relationen **X disjunkt Y**

$$\partial X \cap \partial Y$$

$$X^\circ \cap Y^\circ$$

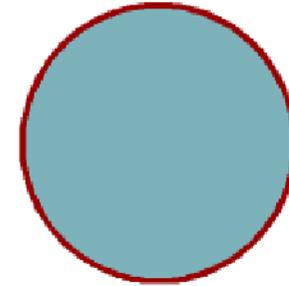
$$\partial X \cap Y^\circ$$

$$X^\circ \cap \partial Y$$

 \emptyset \emptyset \emptyset

Operation

X disjunkt Y

**X** disjunkt **Y**

Topologische Relationen **X disjunkt Y**

$\partial X \cap \partial Y$ $X^\circ \cap Y^\circ$ $\partial X \cap Y^\circ$ $X^\circ \cap \partial Y$

\emptyset

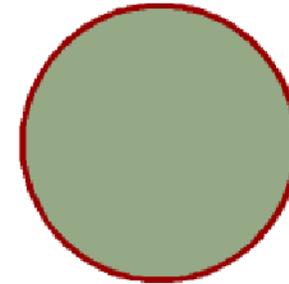
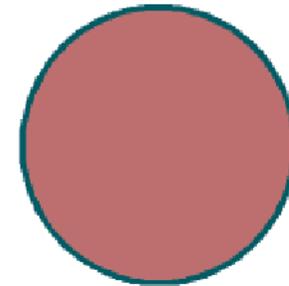
\emptyset

\emptyset

\emptyset

Operation

X disjunkt Y



X disjunkt **Y**



Topologische Relationen **X trifft Y**

$\partial X \cap \partial Y$ $X^\circ \cap Y^\circ$ $\partial X \cap Y^\circ$ $X^\circ \cap \partial Y$

\emptyset

\emptyset

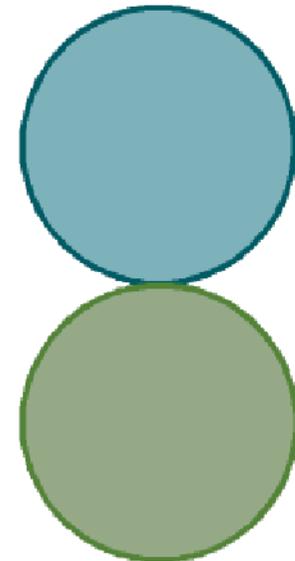
\emptyset

\emptyset

Operation

X disjunkt Y

X trifft Y



X trifft Y



Topologische Relationen **X trifft Y**

$\partial X \cap \partial Y$ $X^\circ \cap Y^\circ$ $\partial X \cap Y^\circ$ $X^\circ \cap \partial Y$

\emptyset

\emptyset

\emptyset

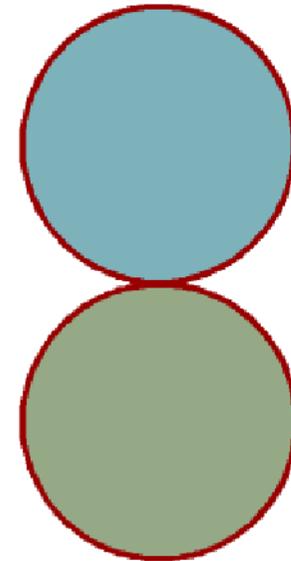
\emptyset

not \emptyset

Operation

X disjunkt Y

X trifft Y



X trifft Y



Topologische Relationen **X trifft Y**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|

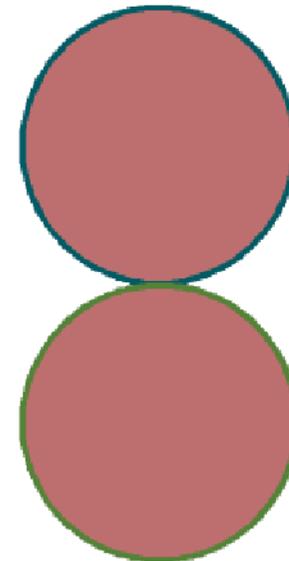
| | | | |
|-------------|-------------|-------------|-------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset |
|-------------|-------------|-------------|-------------|

| | | | |
|-----------------|-------------|--|--|
| not \emptyset | \emptyset | | |
|-----------------|-------------|--|--|

Operation

X disjunkt Y

X trifft Y



X trifft Y



Topologische Relationen **X trifft Y**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|

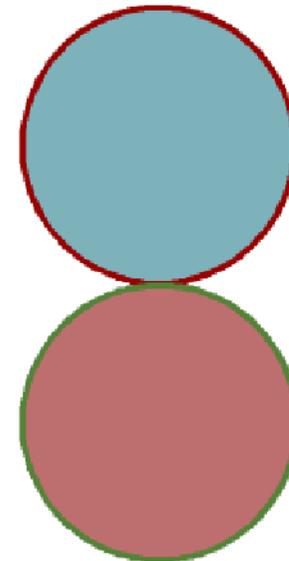
| | | | |
|-------------|-------------|-------------|-------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset |
|-------------|-------------|-------------|-------------|

| | | | |
|-----------------|-------------|-------------|--|
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | |
|-----------------|-------------|-------------|--|

Operation

X disjunkt Y

X trifft Y



X trifft Y



Topologische Relationen **X trifft Y**

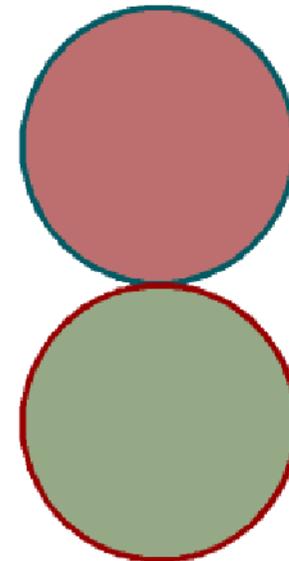
| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|

| | | | |
|-----------------|-------------|-------------|-------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset |

Operation

X disjunkt Y

X trifft Y



X trifft Y



Topologische Relationen **X gleich Y**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|

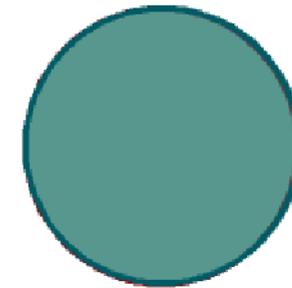
| | | | |
|-----------------|-------------|-------------|-------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset |

Operation

X disjunkt Y

X trifft Y

X gleich Y



X gleich Y



Topologische Relationen **X gleich Y**

$\partial X \cap \partial Y$ $X^\circ \cap Y^\circ$ $\partial X \cap Y^\circ$ $X^\circ \cap \partial Y$

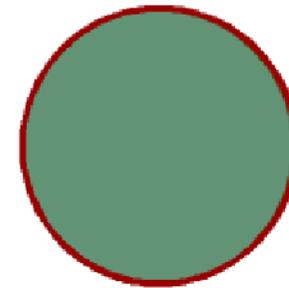
| | | | |
|-----------------|-------------|-------------|-------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset |
| not \emptyset | | | |

Operation

X disjunkt Y

X trifft Y

X gleich Y



X gleich **Y**



Topologische Relationen **X gleich Y**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|

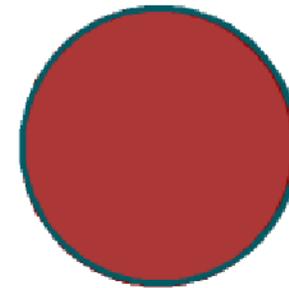
| | | | |
|-----------------|-----------------|-------------|-------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset |
| not \emptyset | not \emptyset | | |

Operation

X disjunkt Y

X trifft Y

X gleich Y

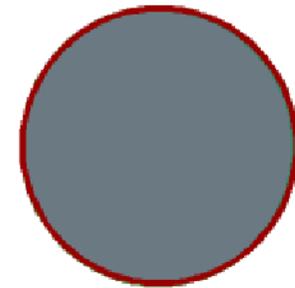


X gleich **Y**



Topologische Relationen **X gleich Y**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ | Operation |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|--------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X disjunkt Y |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X trifft Y |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | | X gleich Y |

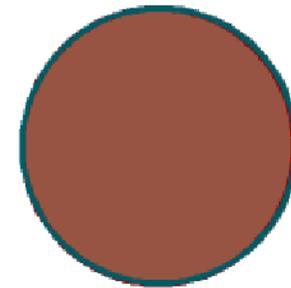


X gleich **Y**



Topologische Relationen **X gleich Y**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ | Operation |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|--------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X disjunkt Y |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X trifft Y |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | \emptyset | X gleich Y |

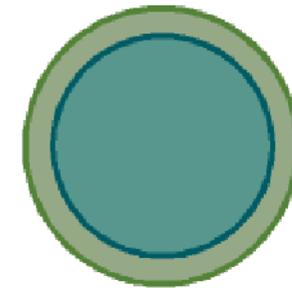


X gleich **Y**



Topologische Relationen **X innerhalb Y**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ | Operation |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X disjunkt Y |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X trifft Y |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | \emptyset | X gleich Y |
| | | | | X innerhalb Y |

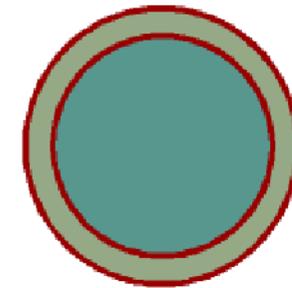


X innerhalb **Y**



Topologische Relationen **X innerhalb Y**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ | Operation |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X disjunkt Y |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X trifft Y |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | \emptyset | X gleich Y |
| \emptyset | | | | X innerhalb Y |

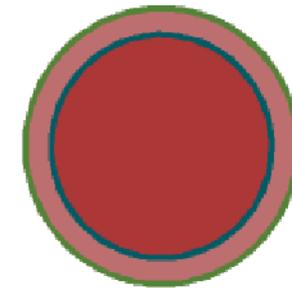


X innerhalb **Y**



Topologische Relationen **X innerhalb Y**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ | Operation |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X disjunkt Y |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X trifft Y |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | \emptyset | X gleich Y |
| \emptyset | not \emptyset | | | X innerhalb Y |

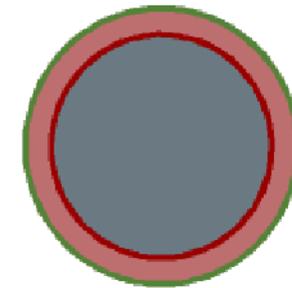


X innerhalb **Y**



Topologische Relationen **X innerhalb Y**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ | Operation |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X disjunkt Y |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X trifft Y |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | \emptyset | X gleich Y |
| \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | | X innerhalb Y |

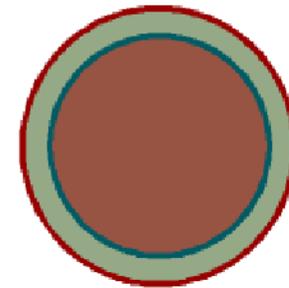


X innerhalb **Y**



Topologische Relationen **X innerhalb Y**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ | Operation |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X disjunkt Y |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X trifft Y |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | \emptyset | X gleich Y |
| \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | X innerhalb Y |

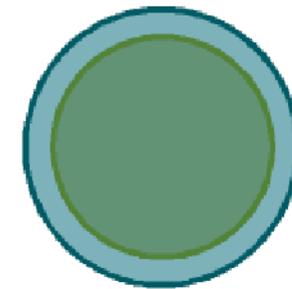


X innerhalb **Y**



Topologische Relationen **Y innerhalb X**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ | Operation |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|--------------------------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X disjunkt Y |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X trifft Y |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | \emptyset | X gleich Y |
| \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | X innerhalb Y Y innerhalb X |

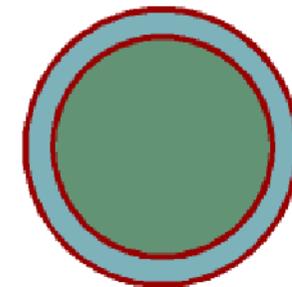


Y innerhalb **X**



Topologische Relationen **Y innerhalb X**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ | Operation |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X disjunkt Y |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X trifft Y |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | \emptyset | X gleich Y |
| \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | X innerhalb Y |
| \emptyset | | | | Y innerhalb X |

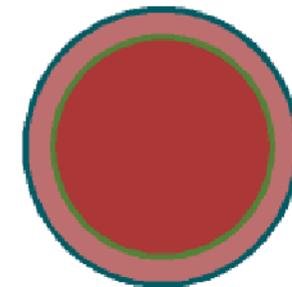


Y innerhalb **X**



Topologische Relationen **Y innerhalb X**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ | Operation |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X disjunkt Y |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X trifft Y |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | \emptyset | X gleich Y |
| \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | X innerhalb Y |
| \emptyset | not \emptyset | | | Y innerhalb X |

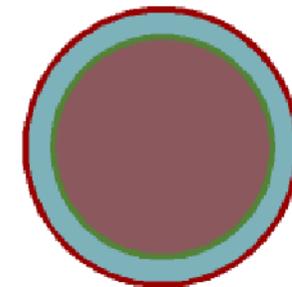


Y innerhalb **X**



Topologische Relationen **Y innerhalb X**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ | Operation |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X disjunkt Y |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X trifft Y |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | \emptyset | X gleich Y |
| \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | X innerhalb Y |
| \emptyset | not \emptyset | \emptyset | \emptyset | Y innerhalb X |

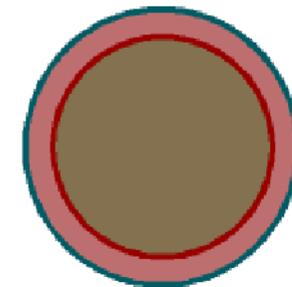


Y innerhalb **X**



Topologische Relationen **Y innerhalb X**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ | Operation |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X disjunkt Y |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X trifft Y |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | \emptyset | X gleich Y |
| \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | X innerhalb Y |
| \emptyset | not \emptyset | \emptyset | not \emptyset | Y innerhalb X |

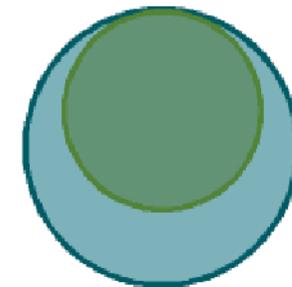


Y innerhalb **X**



Topologische Relationen **X überdeckt Y**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ | Operation |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X disjunkt Y |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X trifft Y |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | \emptyset | X gleich Y |
| \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | X innerhalb Y |
| \emptyset | not \emptyset | \emptyset | not \emptyset | Y innerhalb X |
| | | | | X überdeckt Y |

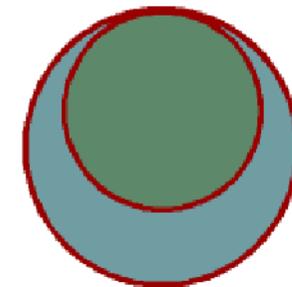


X überdeckt Y



Topologische Relationen **X überdeckt Y**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ | Operation |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X disjunkt Y |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X trifft Y |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | \emptyset | X gleich Y |
| \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | X innerhalb Y |
| \emptyset | not \emptyset | \emptyset | not \emptyset | Y innerhalb X |
| not \emptyset | | | | X überdeckt Y |

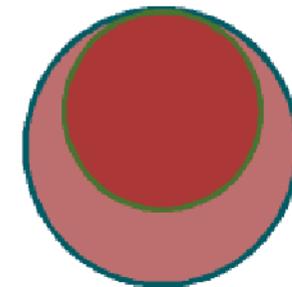


X überdeckt Y



Topologische Relationen **X überdeckt Y**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ | Operation |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X disjunkt Y |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X trifft Y |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | \emptyset | X gleich Y |
| \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | X innerhalb Y |
| \emptyset | not \emptyset | \emptyset | not \emptyset | Y innerhalb X |
| not \emptyset | not \emptyset | | | X überdeckt Y |

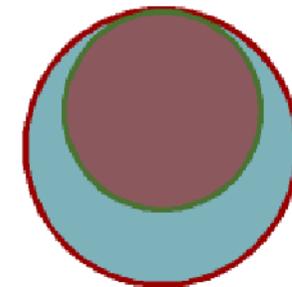


X überdeckt Y



Topologische Relationen **X überdeckt Y**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ | Operation |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X disjunkt Y |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X trifft Y |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | \emptyset | X gleich Y |
| \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | X innerhalb Y |
| \emptyset | not \emptyset | \emptyset | not \emptyset | Y innerhalb X |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | | X überdeckt Y |

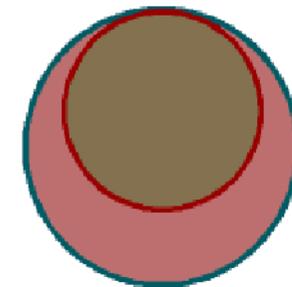


X überdeckt Y



Topologische Relationen **X überdeckt Y**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ | Operation |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X disjunkt Y |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X trifft Y |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | \emptyset | X gleich Y |
| \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | X innerhalb Y |
| \emptyset | not \emptyset | \emptyset | not \emptyset | Y innerhalb X |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | not \emptyset | X überdeckt Y |

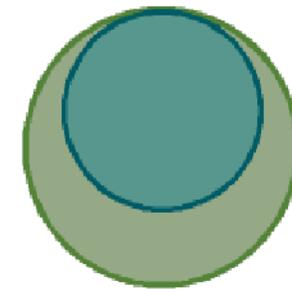


X überdeckt Y



Topologische Relationen **Y überdeckt X**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ | Operation |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|--------------------------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X disjunkt Y |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X trifft Y |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | \emptyset | X gleich Y |
| \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | X innerhalb Y |
| \emptyset | not \emptyset | \emptyset | not \emptyset | Y innerhalb X |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | not \emptyset | X überdeckt Y Y überdeckt X |

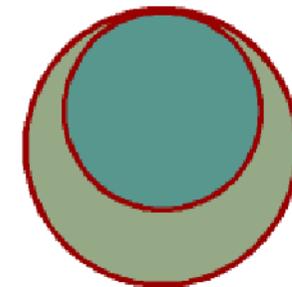


Y überdeckt X



Topologische Relationen **Y überdeckt X**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ | Operation |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X disjunkt Y |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X trifft Y |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | \emptyset | X gleich Y |
| \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | X innerhalb Y |
| \emptyset | not \emptyset | \emptyset | not \emptyset | Y innerhalb X |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | not \emptyset | X überdeckt Y |
| not \emptyset | | | | Y überdeckt X |

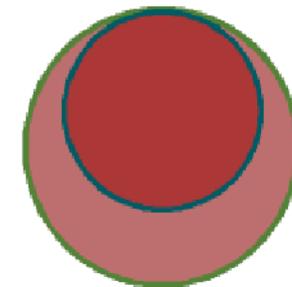


Y überdeckt X



Topologische Relationen **Y überdeckt X**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ | Operation |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X disjunkt Y |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X trifft Y |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | \emptyset | X gleich Y |
| \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | X innerhalb Y |
| \emptyset | not \emptyset | \emptyset | not \emptyset | Y innerhalb X |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | not \emptyset | X überdeckt Y |
| not \emptyset | not \emptyset | | | Y überdeckt X |

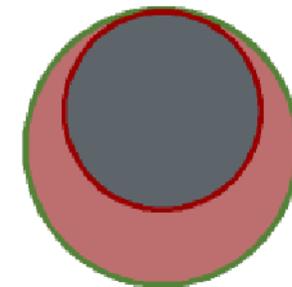


Y überdeckt X



Topologische Relationen **Y überdeckt X**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ | Operation |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X disjunkt Y |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X trifft Y |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | \emptyset | X gleich Y |
| \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | X innerhalb Y |
| \emptyset | not \emptyset | \emptyset | not \emptyset | Y innerhalb X |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | not \emptyset | X überdeckt Y |
| not \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | | Y überdeckt X |

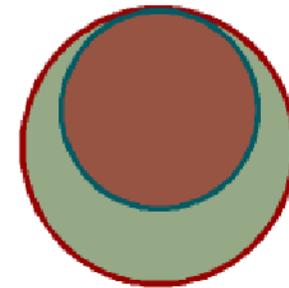


Y überdeckt X



Topologische Relationen **Y überdeckt X**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ | Operation |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X disjunkt Y |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X trifft Y |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | \emptyset | X gleich Y |
| \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | X innerhalb Y |
| \emptyset | not \emptyset | \emptyset | not \emptyset | Y innerhalb X |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | not \emptyset | X überdeckt Y |
| not \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | Y überdeckt X |

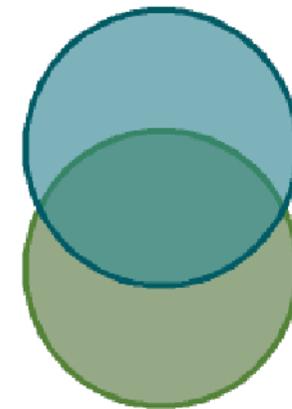


Y überdeckt X



Topologische Relationen **X überlappt Y**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ | Operation |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X disjunkt Y |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X trifft Y |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | \emptyset | X gleich Y |
| \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | X innerhalb Y |
| \emptyset | not \emptyset | \emptyset | not \emptyset | Y innerhalb X |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | not \emptyset | X überdeckt Y |
| not \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | Y überdeckt X |
| | | | | X überlappt Y |

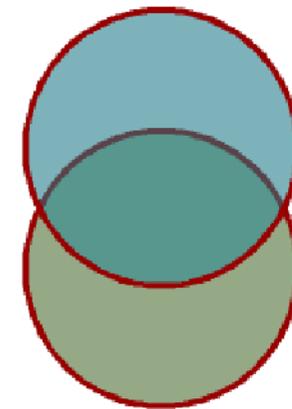


X überlappt Y



Topologische Relationen **X überlappt Y**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ | Operation |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X disjunkt Y |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X trifft Y |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | \emptyset | X gleich Y |
| \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | X innerhalb Y |
| \emptyset | not \emptyset | \emptyset | not \emptyset | Y innerhalb X |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | not \emptyset | X überdeckt Y |
| not \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | Y überdeckt X |
| not \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | X überlappt Y |

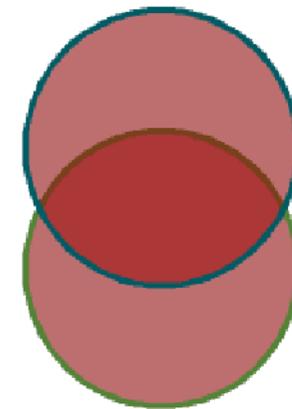


X überlappt Y



Topologische Relationen **X überlappt Y**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ | Operation |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X disjunkt Y |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X trifft Y |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | \emptyset | X gleich Y |
| \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | X innerhalb Y |
| \emptyset | not \emptyset | \emptyset | not \emptyset | Y innerhalb X |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | not \emptyset | X überdeckt Y |
| not \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | Y überdeckt X |
| not \emptyset | not \emptyset | | | X überlappt Y |

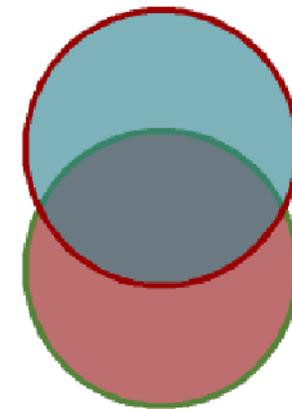


X überlappt Y



Topologische Relationen **X überlappt Y**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ | Operation |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X disjunkt Y |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X trifft Y |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | \emptyset | X gleich Y |
| \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | X innerhalb Y |
| \emptyset | not \emptyset | \emptyset | not \emptyset | Y innerhalb X |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | not \emptyset | X überdeckt Y |
| not \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | Y überdeckt X |
| not \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | X überlappt Y |

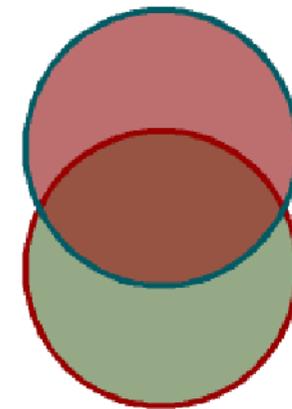


X überlappt Y



Topologische Relationen **X überlappt Y**

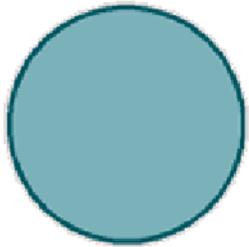
| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ | Operation |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X disjunkt Y |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X trifft Y |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | \emptyset | X gleich Y |
| \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | X innerhalb Y |
| \emptyset | not \emptyset | \emptyset | not \emptyset | Y innerhalb X |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | not \emptyset | X überdeckt Y |
| not \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | Y überdeckt X |
| not \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | X überlappt Y |



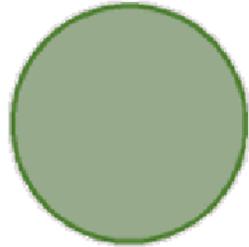
X überlappt Y



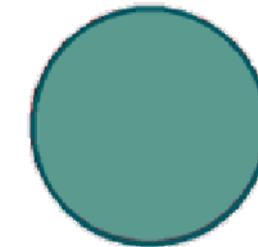
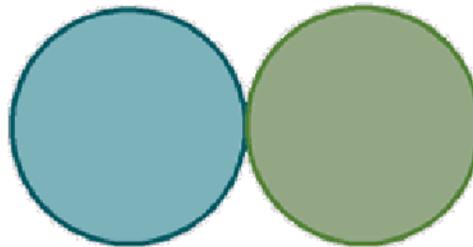
Topologische Relationen Zusammenfassung I



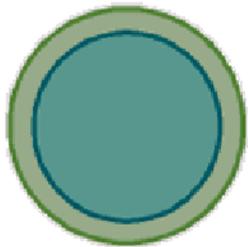
X disjunkt Y



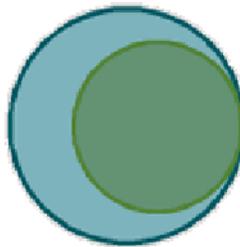
X trifft Y



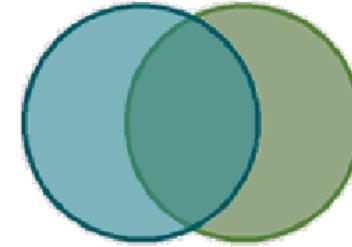
X gleich Y



X innerhalb Y



X überdeckt Y



X überlappt Y

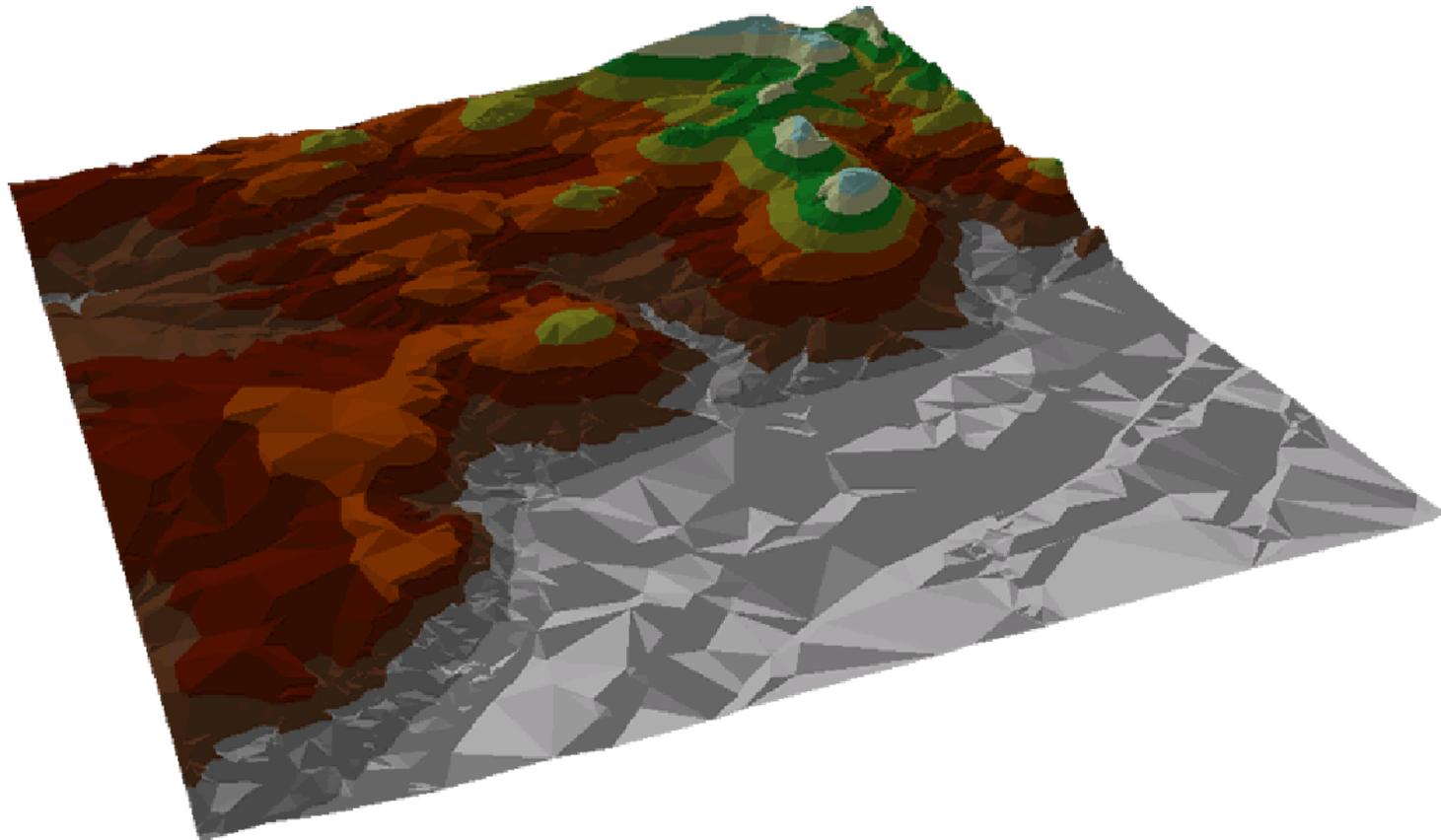


Topologische Relationen **Zusammenfassung II**

| $\partial X \cap \partial Y$ | $X^\circ \cap Y^\circ$ | $\partial X \cap Y^\circ$ | $X^\circ \cap \partial Y$ | Operation |
|------------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X disjunkt Y |
| not \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | X trifft Y |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | \emptyset | X gleich Y |
| \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | X innerhalb Y |
| \emptyset | not \emptyset | \emptyset | not \emptyset | Y innerhalb X |
| not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | not \emptyset | X überdeckt Y |
| not \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | \emptyset | Y überdeckt X |
| not \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | not \emptyset | X überlappt Y |



Topologie **Algebraische Topologie**



Algebraische Topologie **Motivation**

In Kapitel 4 wurde die Geometrie räumlicher Objekte durch eine **Vektor-Struktur** (Punkt, Kante, Polygon) repräsentiert.

Grundlegendes, theoretisches Modell dieser Darstellung ist die Notation der **simplizialen Komplexe**

- Objekte werden durch **simpliziale Komplexe** modelliert
- **Simpliziale Komplexe** bestehen aus strukturell gleichgebauten Primitiven (Simplexe)
- **Simpliziale Komplexe** eignen sich gut zur Modellierung topologischer Zusammenhänge:
 - Belegung von Komplexen mit Attributen
 - Belegung der Primitive mit Attributen



Algebraische Topologie **Anwendungen**

- Geländemodell (Triangulation)
- Computergraphik
- Eisberge
- ...



Algebraische Topologie **Simplizes**

Ein **0-Simplex** ist ein Punkt



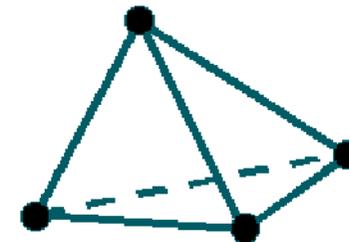
Ein **1-Simplex** ist eine gerade Kante



Ein **2-Simplex** ist ein Dreieck (Inneres + 3 Kanten + 3 Knoten)

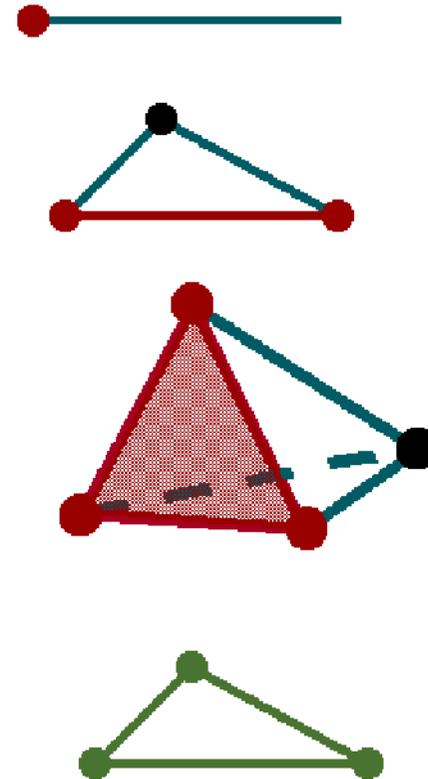


Ein **3-Simplex** ist ein Tetraeder



Algebraische Topologie **Teilsimplizes**

- Ein **Knoten** ist Teilsimplex einer Kante
- Eine **Kante** ist Teilsimplex eines Dreiecks
- Ein **Dreieck** ist Teilsimplex eines Tetraeders
- Der **Teilsimplex** T eines Simplex S ist ein Simplex, dessen Knoten alle in S vorkommen.
- Der **Rand** eines Simplex ist die Menge aller Teilsimplizes.

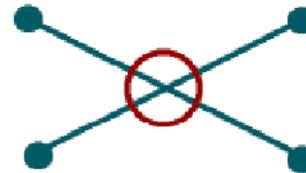


Algebraische Topologie **Simpliziale Komplexe**

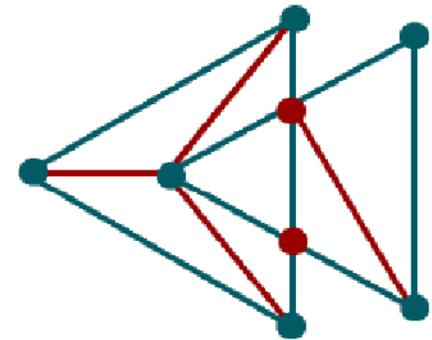
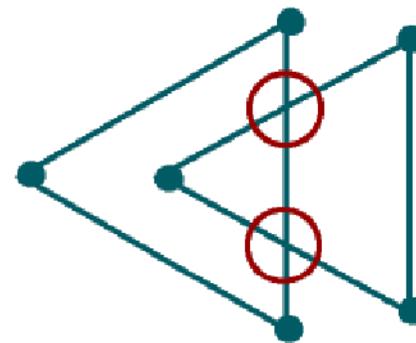
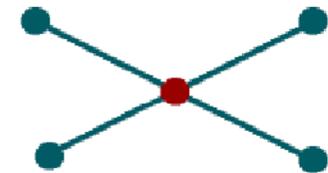
Ein Simplizialer Komplex C ist eine Menge von Simplizes mit folgenden Eigenschaften:

- jeder Teilsimplex in C ist ebenfalls in C
- der Durchschnitt zweier Simplizes in C ist entweder leer oder ein Teilsimplex beider Simplizes

falsch:



Korrektur:



Topologie **Literatur**

Worboys, Michael F.: GIS: A Computing Perspective. Taylor & Francis Inc., London
1995

