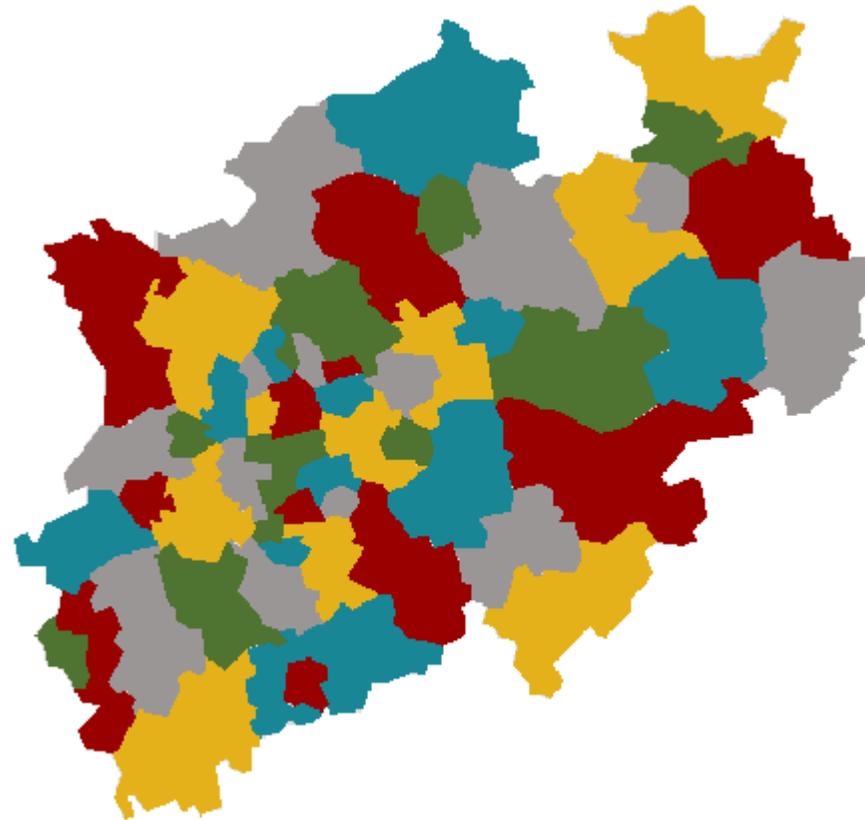


# Lernmodul 2 Landkarten



# Landkarten **Übersicht**

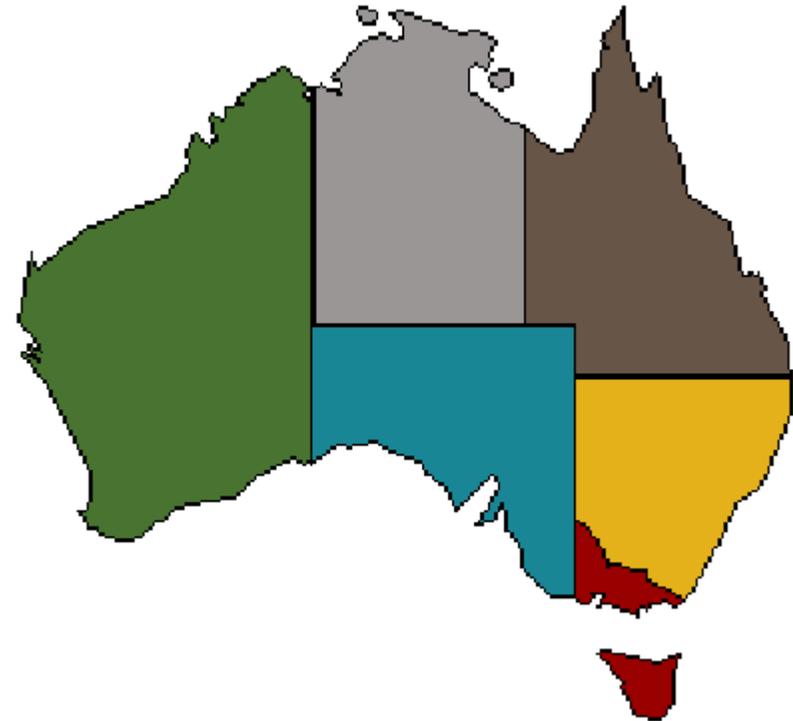
- Tesselation: Definition
- Landkarte
  - Definition
  - Einschränkungen
  - Topologische Beziehungen
  - Euler-Formel
  - Topologische Fehler
  - Integritätsbedingungen



# Tesselation **Definition**

Eine **Tesselation** ist eine **vollständige** und **überlappungsfreie** Zerlegung der euklidischen Ebene in flächenhafte Objekte (Maschen).

- **vollständig:** jeder Punkt ist Element mindestens einer Masche
- **überlappungsfrei:** kein Punkt liegt im Inneren zweier Maschen

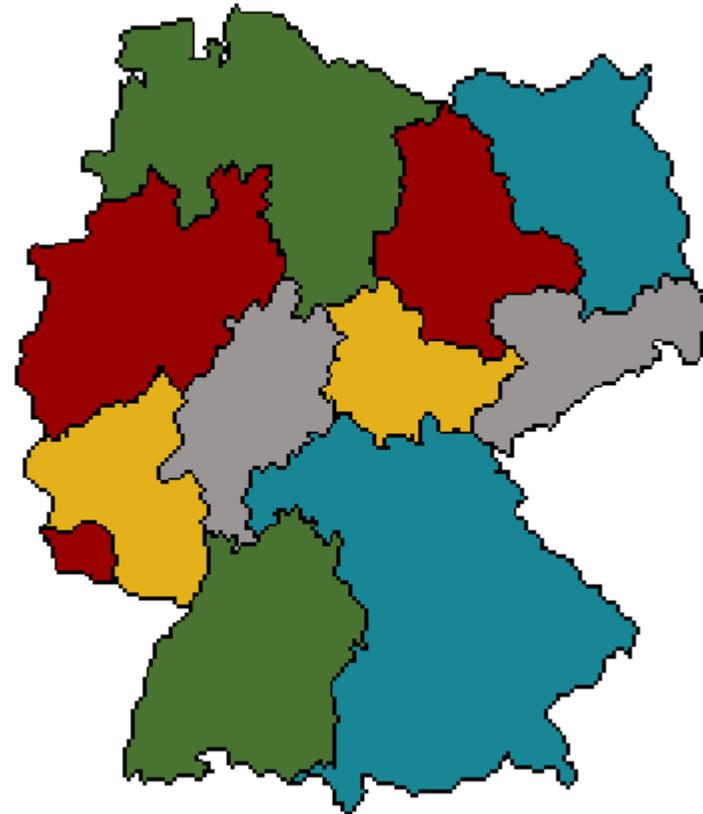


# Landkarte **Definition**

**Landkarten** sind Tesselationen mit folgenden Eigenschaften:

- jede **Masche** ist der geschlossenen Kreisscheibe topologisch äquivalent
- die **Aggregation aller inneren Maschen** ist der geschlossenen Kreisscheibe topologisch äquivalent

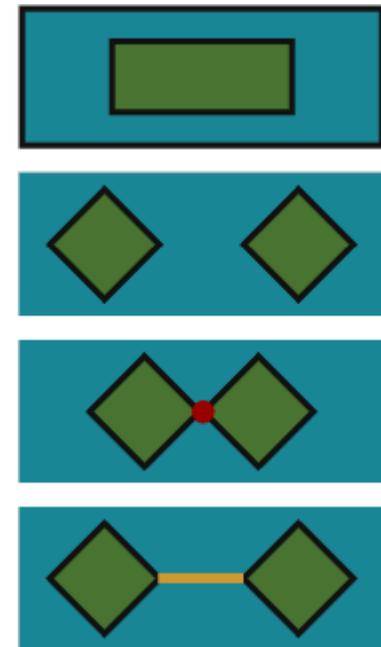
Beachte: zu jeder Landkarte gehört eine unbeschränkte Masche "**Außen**" - die einzige Masche, die nicht der geschlossenen Kreisscheibe äquivalent ist



# Landkarte **Einschränkungen**

Um die Mathematik zu vereinfachen, sind in Landkarten folgende Fälle zunächst nicht vorgesehen (Hinweis: **Blau** ist **Außen**, **Grün** ist **Innen**):

- Inseln** (z.B. **Berlin** in **Brandenburg**)
- Auseinander liegende Maschen ("**Kontinente**"): die Aggregation **Grün** ist nicht zusammenhängend
- Mehrere "**Kontinente**", die sich in **genau einem Punkt** berühren
- Isthmen**: linienhafte Verbindungen zwischen auseinander liegenden **Kontinenten**, z.B. Hindenburgdamm/Sylt



# Landkarte **Übungen**

**Übung 1:** Zeigen Sie die Verstöße gegen die Einschränkungen a) und b) unter Verwendung der Definition der topologischen Äquivalenz.

**Übung 2:** Begründen Sie die Unvollständigkeit der Karte der Bundesländer

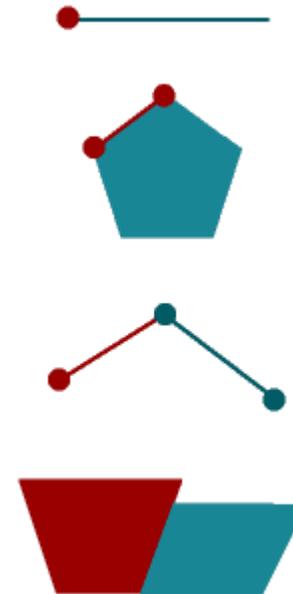


**A** 1x



# Landkarte Topologische Beziehungen (vgl. Kapitel 2)

- Inzidenz von **Knoten** und **Kanten**
- Inzidenz von **Kanten** und **Maschen**
- Adjazenz von **Kanten** und **Kanten**
- Adjazenz von **Maschen** und **Maschen**



**Inzidenz** bezeichnet die Beziehung zwischen verschiedenartigen Elementen

**Adjazenz** bezeichnet die Beziehung zwischen gleichartigen Elementen



# Landkarte **Euler-Formel**

- Für jede Landkarte mit
  - f Maschen (face)
  - e Kanten (edge)
  - v Knoten (vertex) gilt:  
 $f - e + v = 2$  → **Euler-Charakteristik**
- **Euler-Charakteristik:**
  - Landkarte: **2**
  - Landkarte mit n Kontinenten: **n + 1**
  - Landkarte mit n Kontinenten und m Inseln : **n + m + 1**

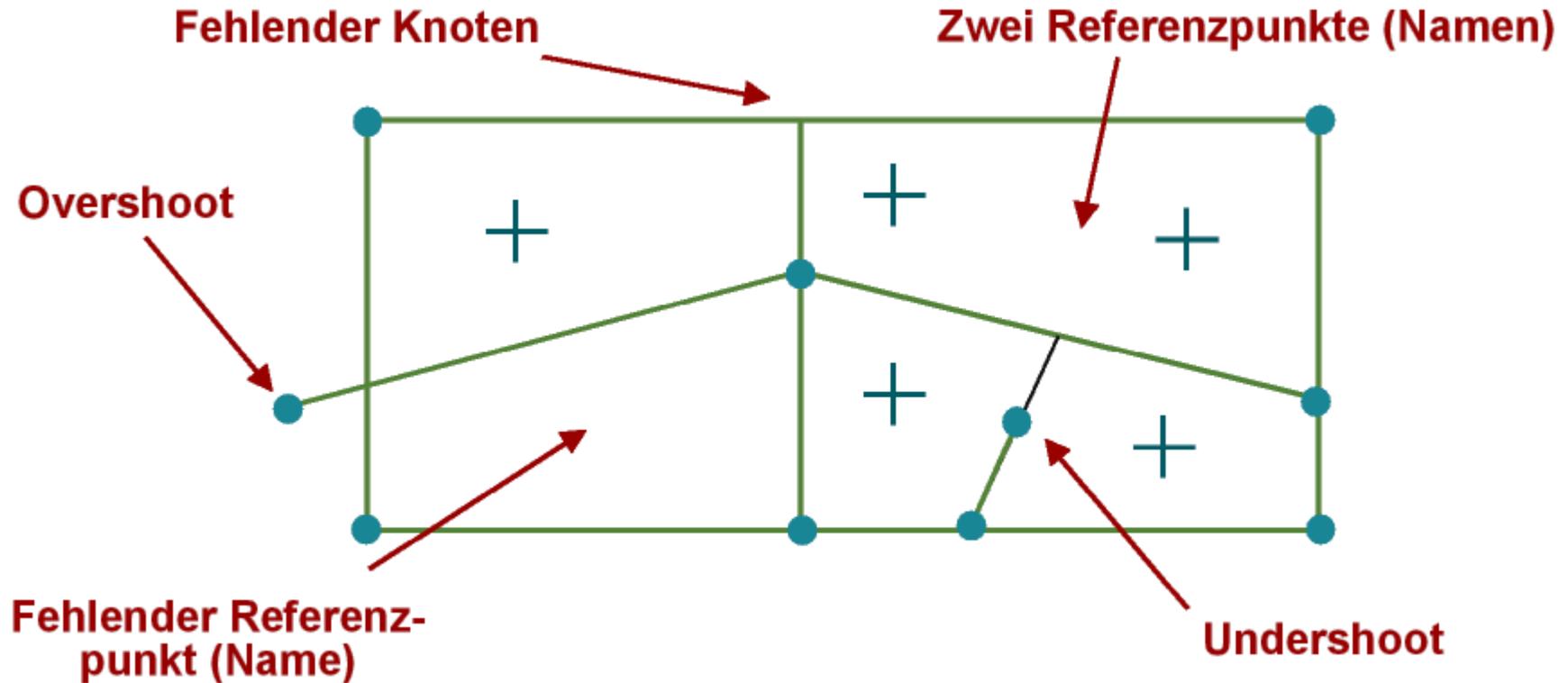
**Beachte:** Außen zählt als eigene Masche!



# Landkarte **Topologisch korrektes Beispiel**

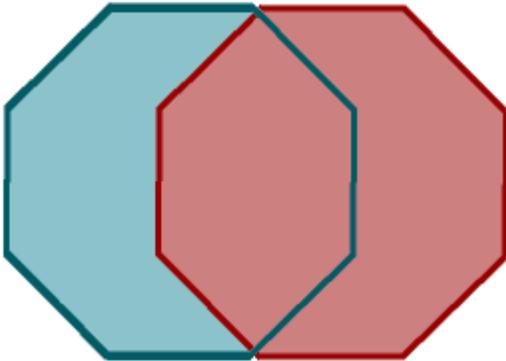


# Landkarte Topologische Fehler I

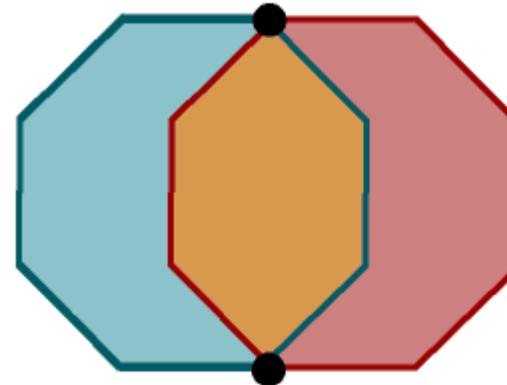


## Landkarten **Topologische Fehler II**

**Falsch:** Überlappung zweier Maschen **mit** Überschneidung von Kanten:



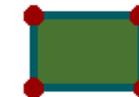
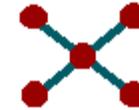
**Richtig:** Überlappung zweier Maschen **ohne** Überschneidung von Kanten:



# Landkarte **Integritätsbedingungen I**



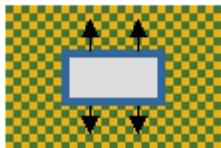
1. Schnittfreiheit der Kanten
2. Jede Kante hat zwei Maschen auf verschiedenen Seiten
3. Jede Masche wird von einem einfachen Zyklus begrenzt
4. Kein Mittelpunkt einer Kante liegt im Inneren einer Masche



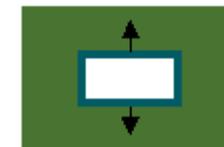
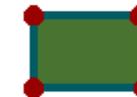
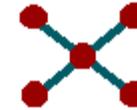
Für Axiom 4 gibt es eine **alternative Formulierung** >>



# Landkarte Integritätsbedingungen II



1. Schnittfreiheit der Kanten
2. Jede Kante hat zwei Maschen auf verschiedenen Seiten
3. Jede Masche wird von einem einfachen Zyklus begrenzt
4. **Es gibt genau eine unbeschränkte Masche**



# Landkarte **Vergleich der Integritätsbedingungen I**

Prüfung der Integrität einer Landkarte erfordert die Anwendung und Verifizierung der Axiome für diese Landkarte

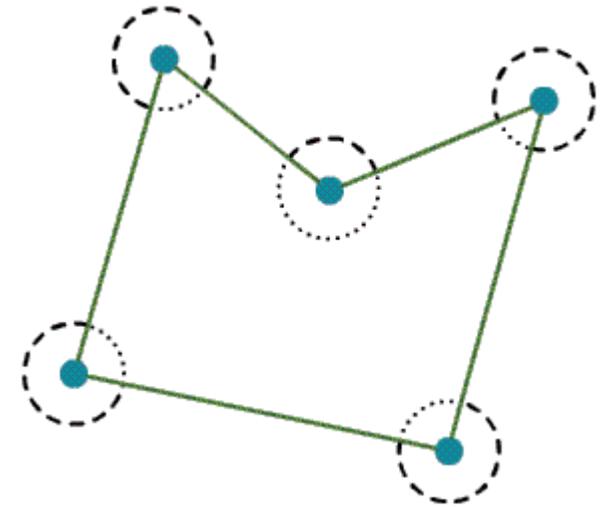
Anwendungsfall des **4. Axioms**:

- a) **Kein Mittelpunkt einer Kante liegt im Inneren einer Masche**
  - Überprüfung durch Verwendung eines **Punkt-in-Polygon-Verfahrens**
  - Anwendung des Verfahrens für jedes Paar von Kanten und Maschen
  - **sehr aufwändig!**



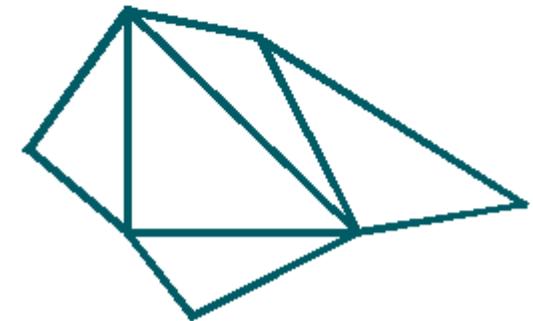
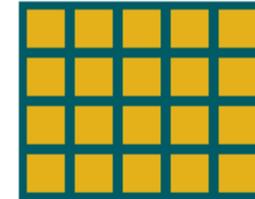
## Landkarte Vergleich der Integritätsbedingungen II

- b) **Es gibt genau eine unbeschränkte Masche**
- Berechnung der **Winkelsumme W** für jede Masche auf der Seite der jeweiligen Masche
  - **Geometrie ebener Vielecke:**  
In einem ebenen Vieleck mit  $n$  Kanten ergibt sich als Summe der Innenwinkel  $(n-2)*180^\circ$ , als Summe der Außenwinkel  $(n+2)*180^\circ$  (Abbildung)
  - **W entspricht der Summe der Innenwinkel:**  
Masche ist beschränkt
  - **W entspricht der Summe der Außenwinkel:**  
Masche ist unbeschränkt
  - **Diese Version läßt sich wesentlich einfacher überprüfen.**



# Landkarte **Abgeleitete Strukturen**

- quadratische Maschen gleicher Größe: **Raster**, Grid
- Maschen sind Dreiecke
  - Triangulation
  - gut zur Modellierung des Geländes
- Verallgemeinerung (siehe Abschnitt 5)
  - Simplizes
  - **Simpliziale Komplexe**



# Landkarte + Simpliziale Komplexe **Resümee**

- Landkarten
  - 2D
  - beliebige Polygone
- Simpliziale Komplexe
  - Dreiecke
  - auch 3D
- Gemeinsamkeiten
  - Konstruktion des Raumes durch Aggregation atomarer Primitive
  - "algebraische" oder "kombinatorische" Topologie



# Landkarten **Literatur**

**Gröger, Gerhard:** Modellierung raumbezogener Objekte und Datenintegrität in GIS.  
1. Auflage - Wichmann, Heidelberg, 2000

