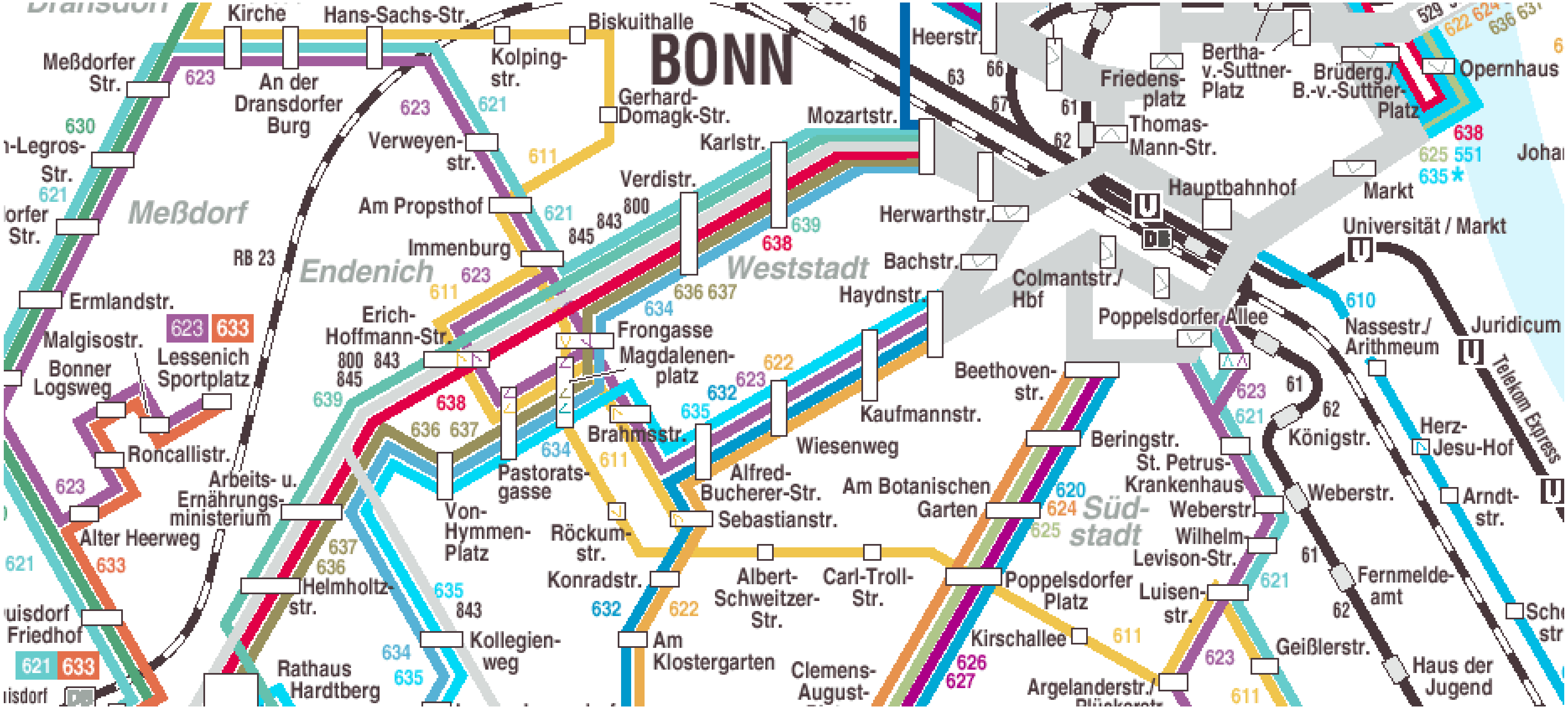
Lernmodul 2 Graphen



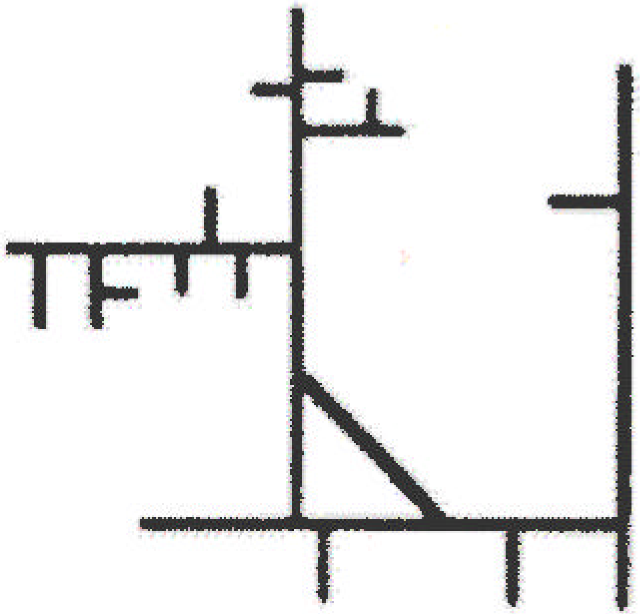
Graphen Übersicht

- Motivation
- Ungerichteter Graph
- Gerichteter Graph
- Inzidenz, Adjazenz, Grad
- Pfad, Zyklus
- Zusammenhang, Trennende Kante, Trennender Knoten
- Planarer Graph
- Isomorphie
- Ausblick

Graphen Motivation

- Für raumbezogene Anfragen/Analysen werden häufig **Netzwerke** benötigt
  Beispiel: **Routenplanung**
- Ein **Netzwerk** bezeichnet eine Menge von Elementen/Objekten, die untereinander verknüpft sind.
  Beispiele:
  - Internet: Eine große Anzahl verknüpfter Rechner
  - **Straßennetz**: Städte, Dörfer,... sind durch Straßen verbunden
- **Graphen** stellen die mathematische Modellierung von Netzwerken dar

Graphen Von der Karte zum Netzwerk



Großmaßstäbige Kartierung auf Basis von Koordinaten

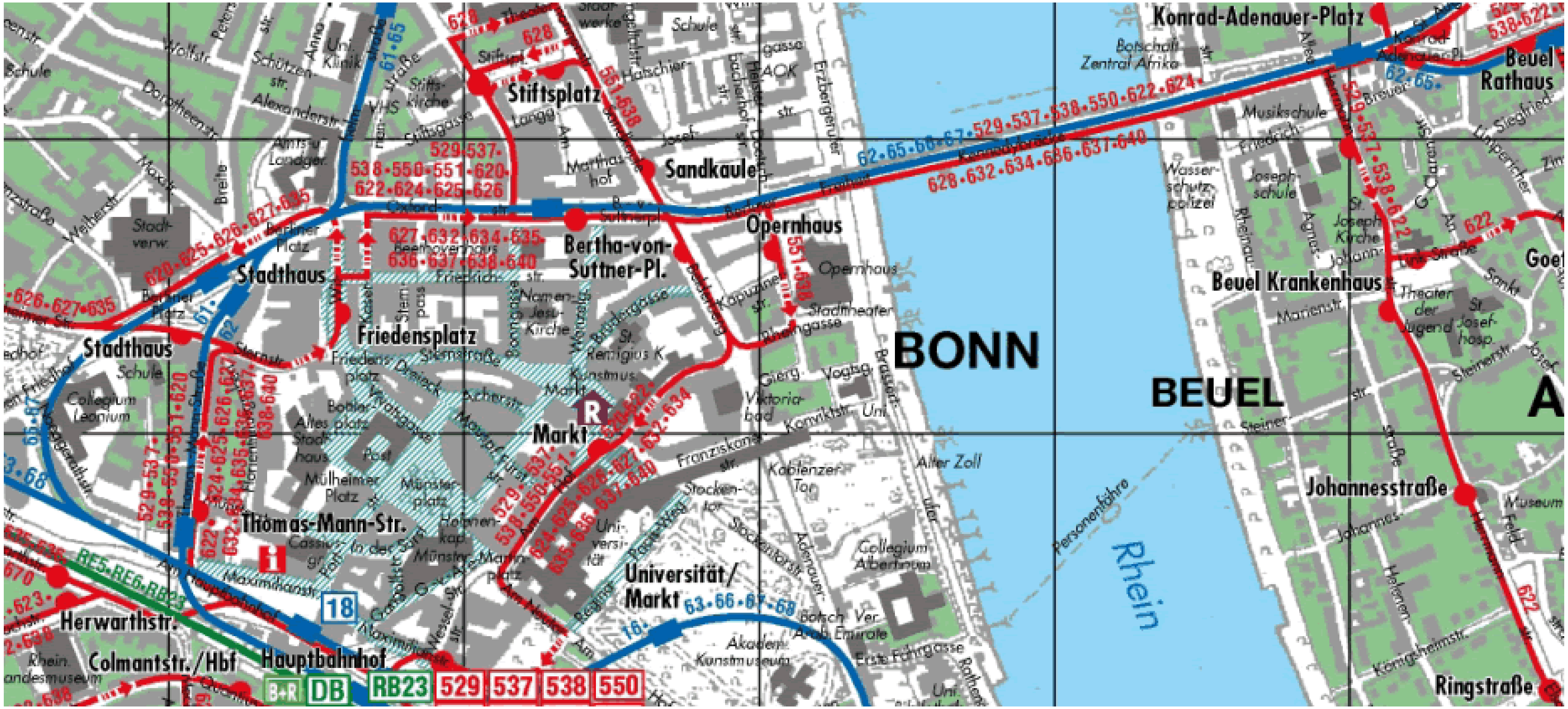
Generalisierung von Verbindungen

Entfernung des Kontextes

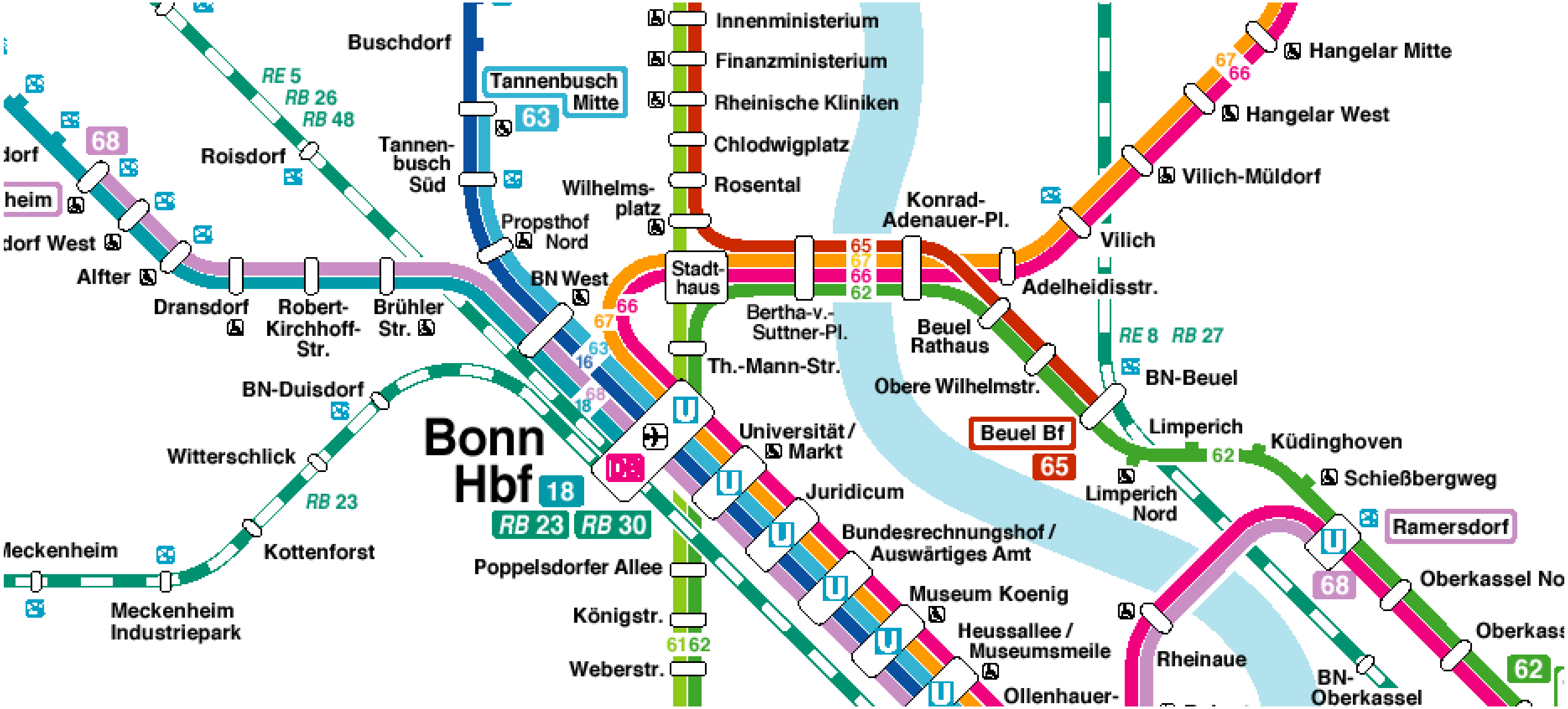
Entzerren von Verbindungen

3x

Graphen VRS Liniennetzplan der Bonner Innenstadt



Graphen Kartogramm des Liniennetzplanes

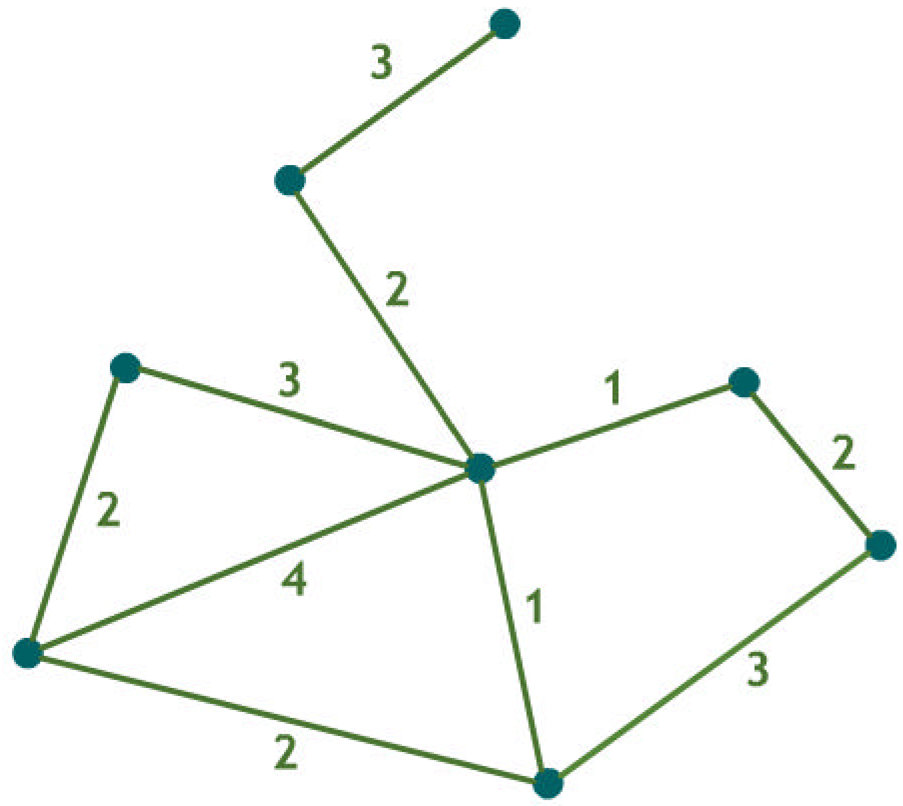


Definitionen Ungerichteter Graph

Ein **ungerichteter Graph** G(V,E) ist eine Menge V von **Knoten** zusammen mit einer Menge E von **Kanten**. Eine Kante e ist eine Menge (ungeordnetes Paar) von je 2 Knoten v.

e = {x,y} x aus V
y aus V

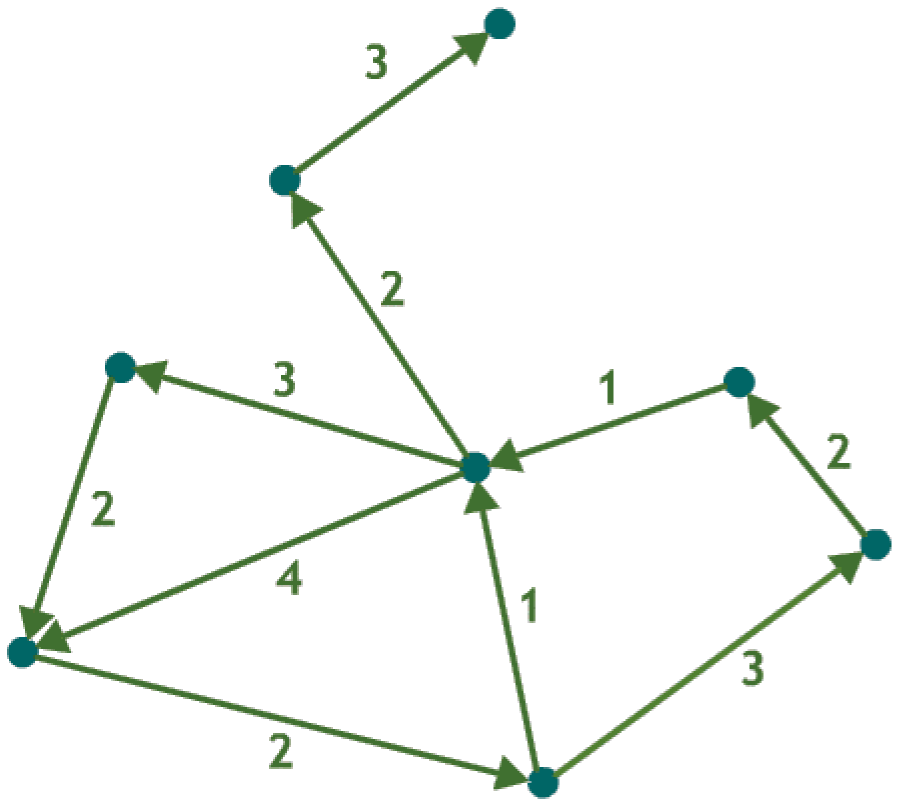
Sind **Kanten** und **Knoten** mit Werte versehen, wird ein Graph **knoten-** bzw. **kanten**bewertet genannt.



2x

Definitionen Gerichteter Graph

Gerichtete Graphen unterscheiden sich von ungerichteten dadurch, dass die **Kanten** nicht Mengen (ungerichtet) sondern geordnete Paare von **Knoten** (gerichtet) sind.

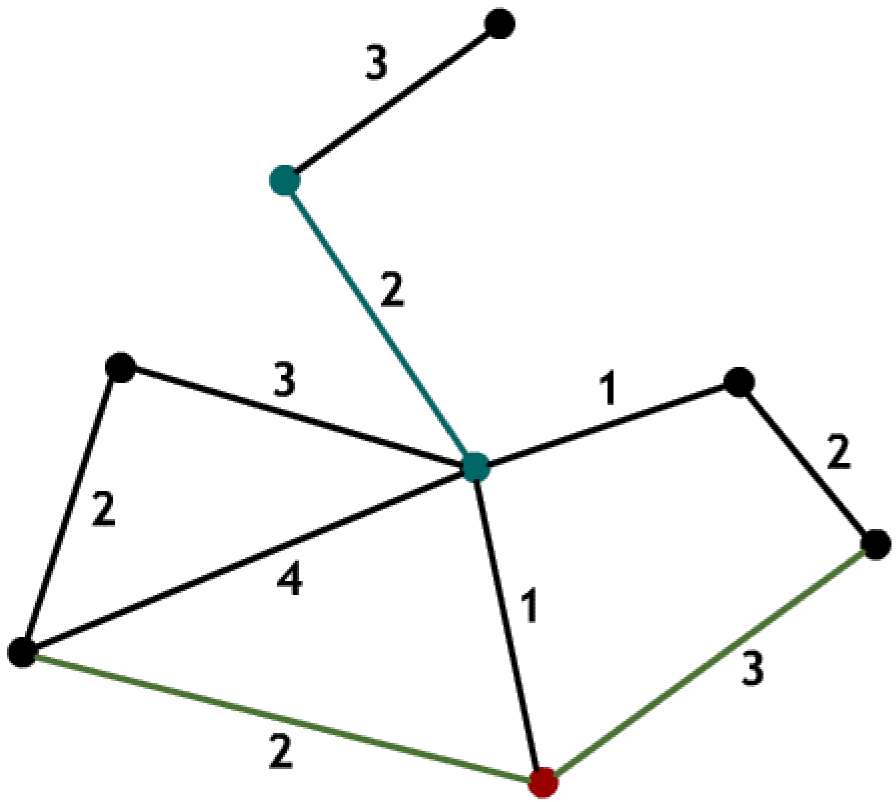


Definitionen Inzidenz, Adjazenz, Grad

Wenn e = {x,y} dann sind x und e bzw. y und e **inzident**.

Zwei Kanten {x,**y**} und {**y**,z} sind **adjazent**.

Grad eines Knotens: Zahl der inzidenten Kanten
Übung: Welchen Grad haben Knoten in Landkarten mindestens?



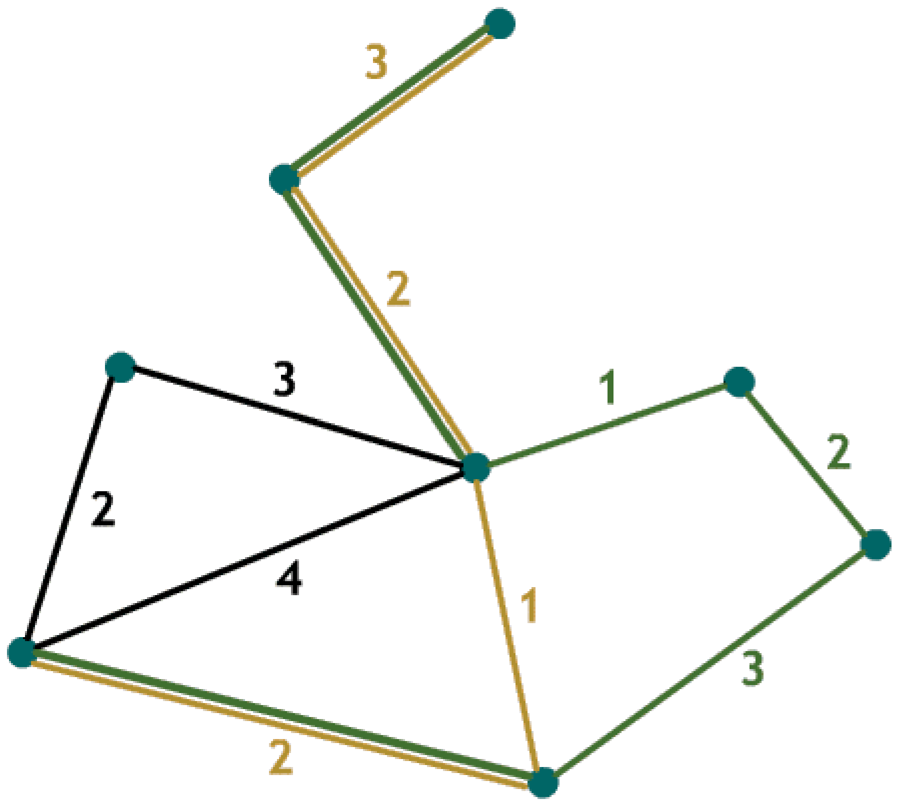
Definitionen Pfad, Zyklus

Ein Pfad ($\{a_1,a_2\},\{a_2,a_3\},\{a_3,a_4\}, \ldots ,$ $\{a_{n-1},a_n\}$) von a_1 nach a_n ist ein Folge von adjazenten Kanten.

In einem bewerteten Graphen lassen sich **kürzeste Pfade** bestimmen.

Ein Pfad von a nach a heißt **Zyklus**.

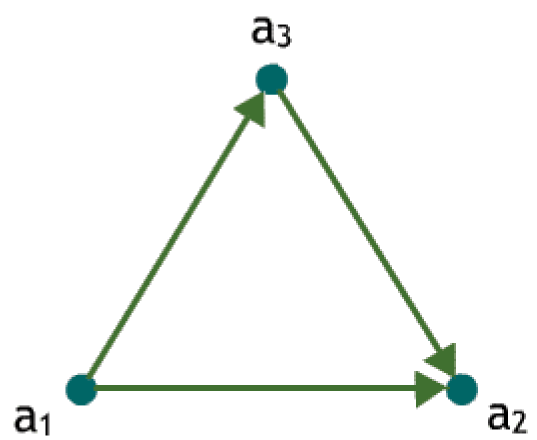
Ein Graph heißt **zyklenfrei**, wenn er keine Zyklen besitzt.
Beispiel: Baum



Definitionen Pfade in gerichteten Graphen

In einem gerichteten Graph ist ein Pfad
$((a_1,a_2),(a_2,a_3),(a_3,a_4), \ldots ,(a_{n-1},a_n))$
eine Folge gerichteter Kanten

Die Definition lässt sich problemlos übertragen.
Beachte: die Kantenrichtungen müssen zusammenpassen.



$(a_1,a_2),(a_1,a_3)$ hat keinen Pfad von a_2 nach a_3

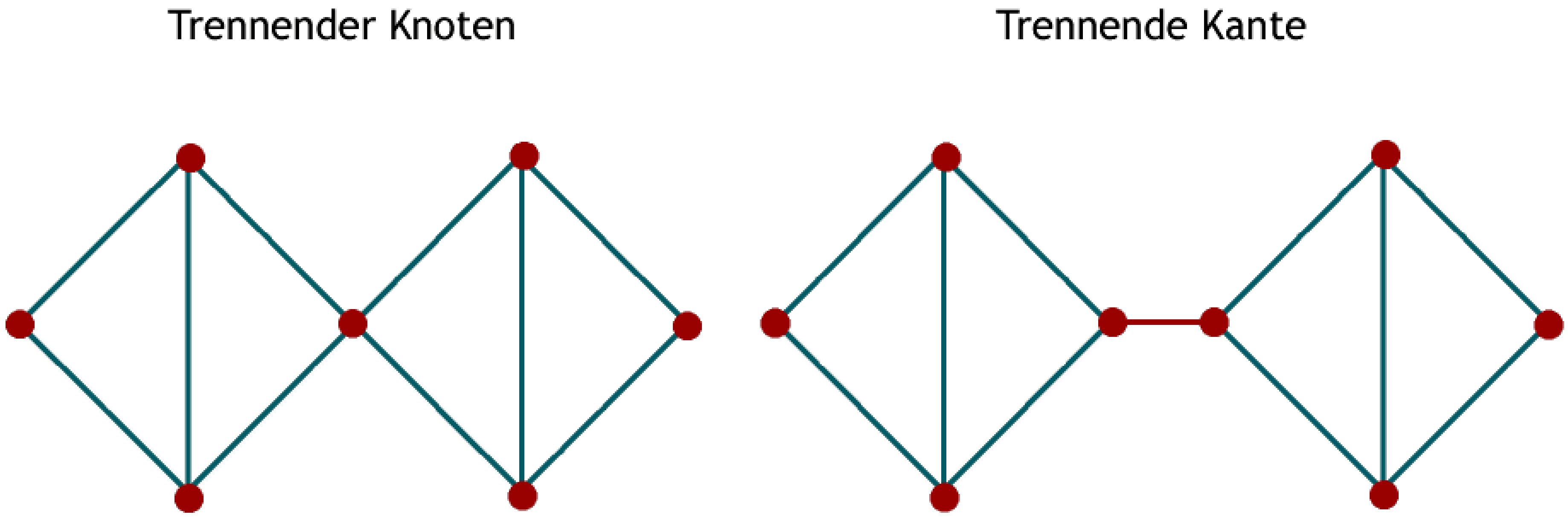
Definitionen Zusammenhang, Trennende Elemente

Ein Graph heißt **zusammenhängend**, wenn es zu jedem Paar von Knoten einen Pfad gibt; sonst **nicht zusammenhängend**.

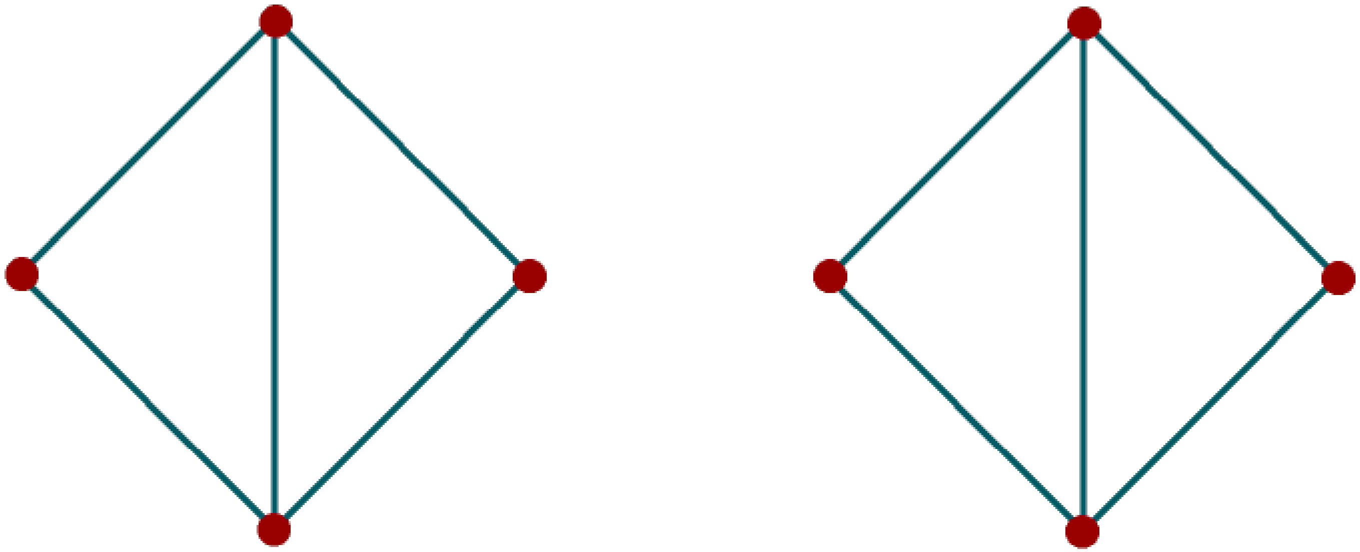
Trennende Kante e eines zusammenhängenden Graphen G ("Isthmus"): Entfernung von e würde G nicht zusammenhängend machen.
Beispiel: Sylt + Hindenburg-Damm

Trennender Knoten v eines zusammenhängenden Graphen G: Entfernung von v würde G nicht zusammenhängend machen.

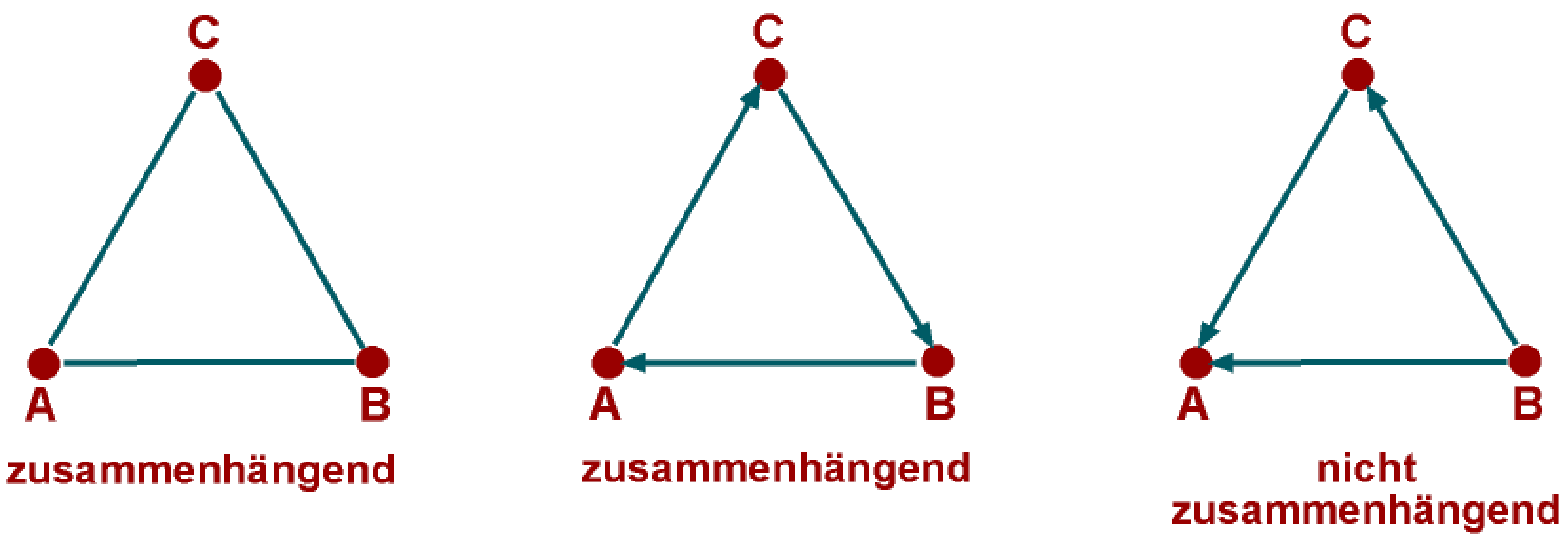
Definitionen Beispiel für Trennende Elemente



Definitionen Nicht zusammenhängend



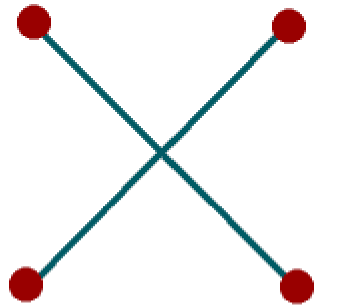
Definitionen Weitere Beispiele



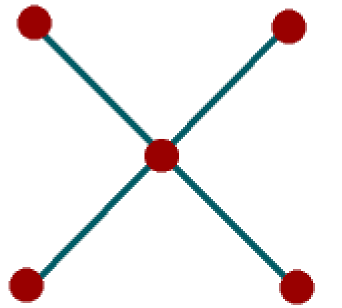
Definitionen **Planarer Graph**

Ein Graph in der Ebene heißt **eben (kreuzungsfrei)**, wenn sich je zwei Kanten nur in ihren Endpunkten schneiden bzw. berühren.

Ein Graph heißt **planar** oder **plättbar**, wenn er eine kreuzungsfreie Darstellung besitzt.



kein ebener Graph



ebener Graph

Definitionen **Isomorphie**

Zwei Graphen sind **isomorph**, wenn eine bijektive Abbildung f existiert, die die Knoten-Kanten-Adjazenzen respektiert.

Es sei

$G = (V,E)$ und $G' = (V',E')$

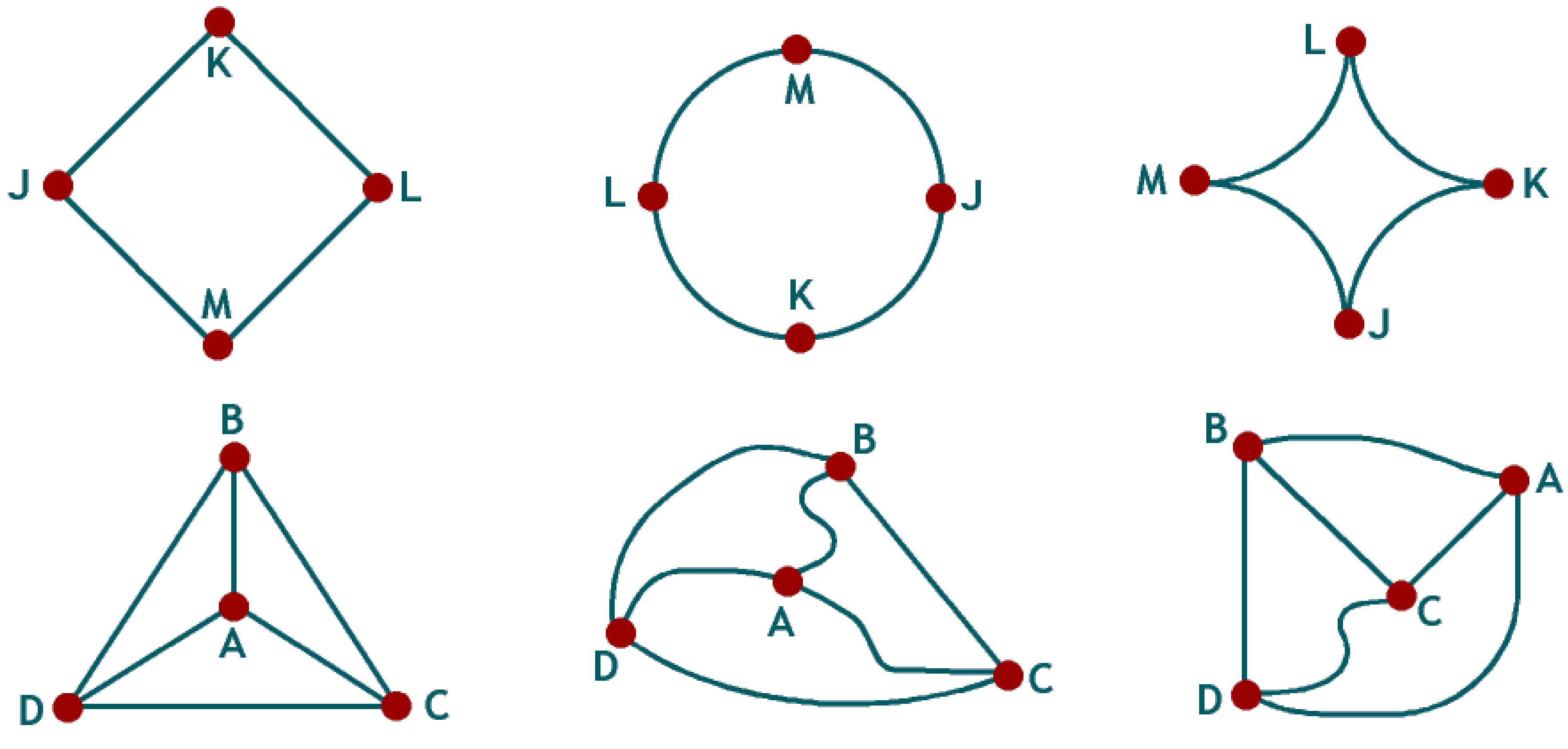
$G \cong G'$ gilt, wenn:

- $V \cong V'$
- $E \cong E'$

→ es existieren bijektive (eineindeutige) Abbildungen

(v_1, v_2) ist aus E genau dann, wenn $(f(v_1), f(v_2)) \in E'$

Graphen Beispiele für isomorphe Graphen



Netze Ausblick

Mit Graphen lassen sich gut **Verkehrs- und Versorgungsnetze** modellieren
Beispiele:

- **Straßennetz, Öffentlicher Nahverkehr**
  spezielle Probleme: Abbiegeverbote
- **Strom und Gas**
  spezielle Probleme: Leitungsübergänge, Änderung von Druck und Spannung

Siehe auch:

- **Lernmodul 7:** Routenplanung in Graphen, Algorithmen von Dijkstra und Floyd

Graphen Literatur

Worboys, Michael F.: GIS: A Computing Perspective. Taylor & Francis Inc., London 1995