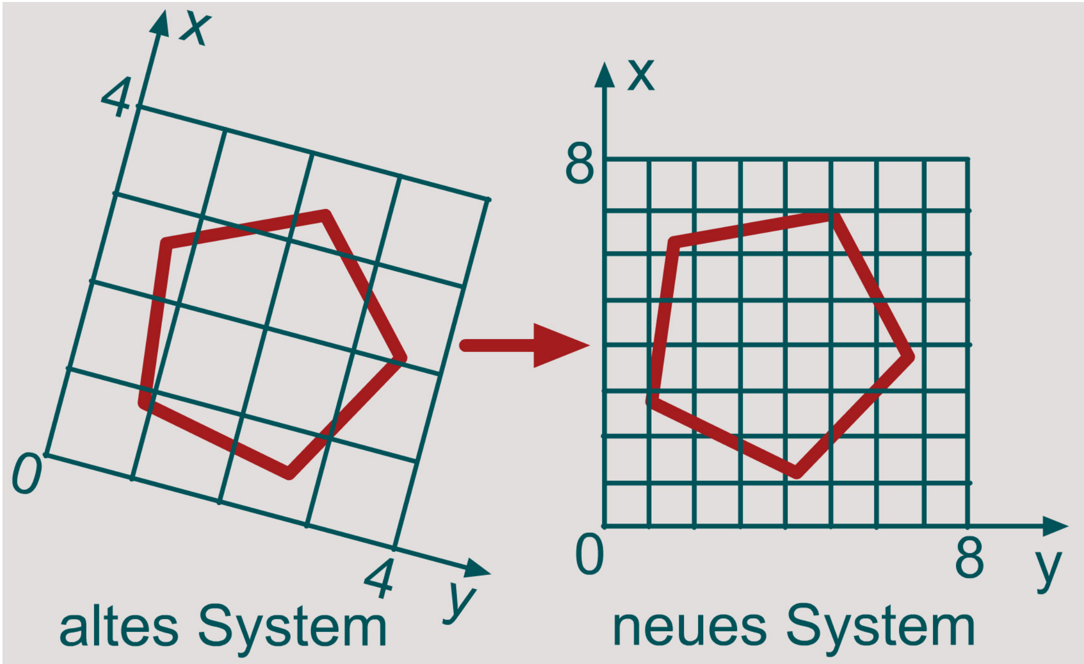
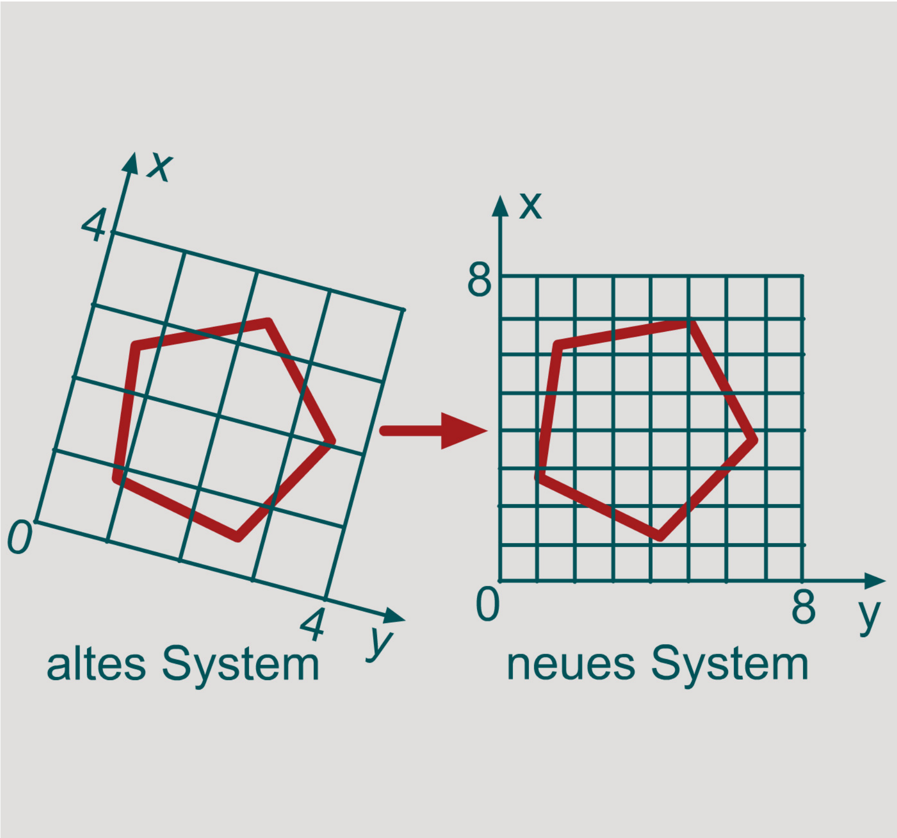
Koordinatentransformationen



Koordinatentransformationen Aufgabe



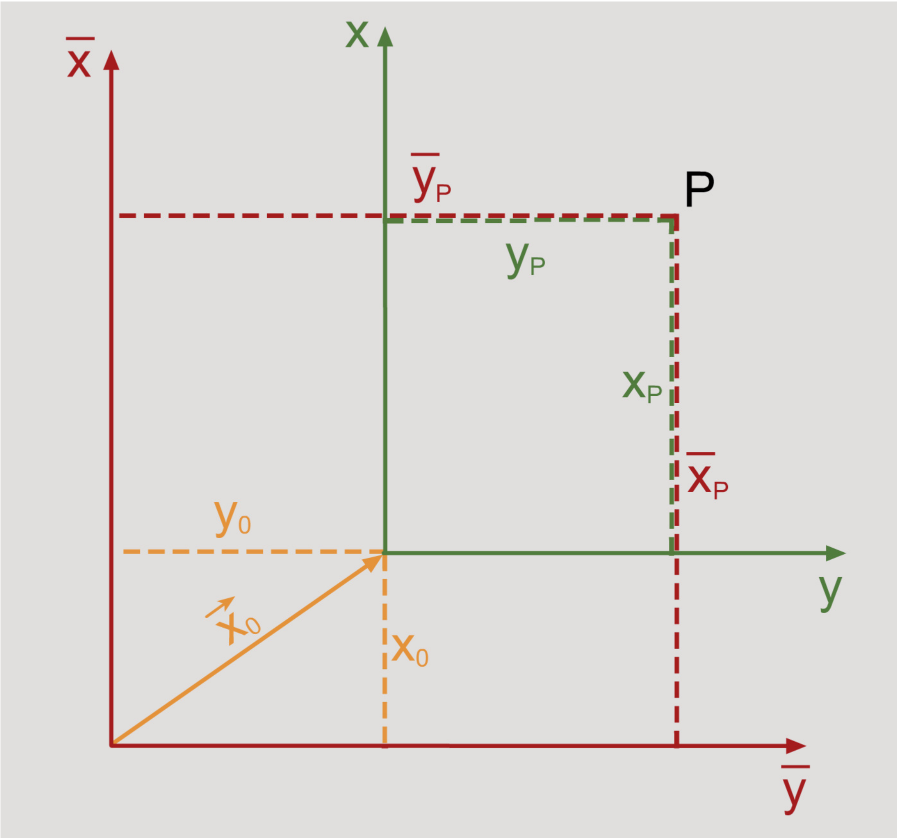
Aufgabe
Koordinaten von einem System in ein anderes übertragen.

Gesucht
Parameter der Transformation.

Beispiele

- örtliches Koordinatensystem <=> Landessystem
- an den Rändern benachbarter Meridianstreifen
- GPS
- Luftbildauswertung

Transformationen Translation (Parallelverschiebung)



altes System:	x_P	y_P
neues System:	$\bar{x}_P$	$\bar{y}_P$
Translation:	x_0	y_0

Transformation ins neue System:

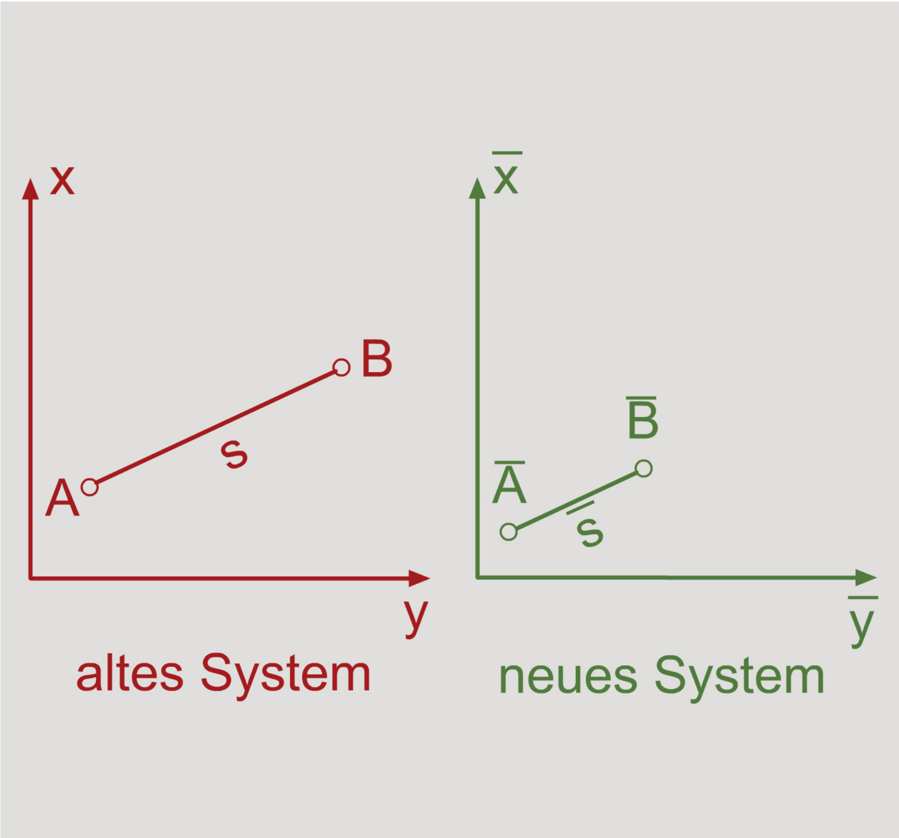
$$\bar{y}_P = x_P + y_0$$

$$\bar{x}_P = x_P + x_0$$

in Vektorschreibweise:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ oder einfach $\vec{\bar{x}} = \vec{x}_0 + \vec{x}$

Transformationen Maßstab



Maßstab:

$$m = \frac{\bar{s}}{s}$$

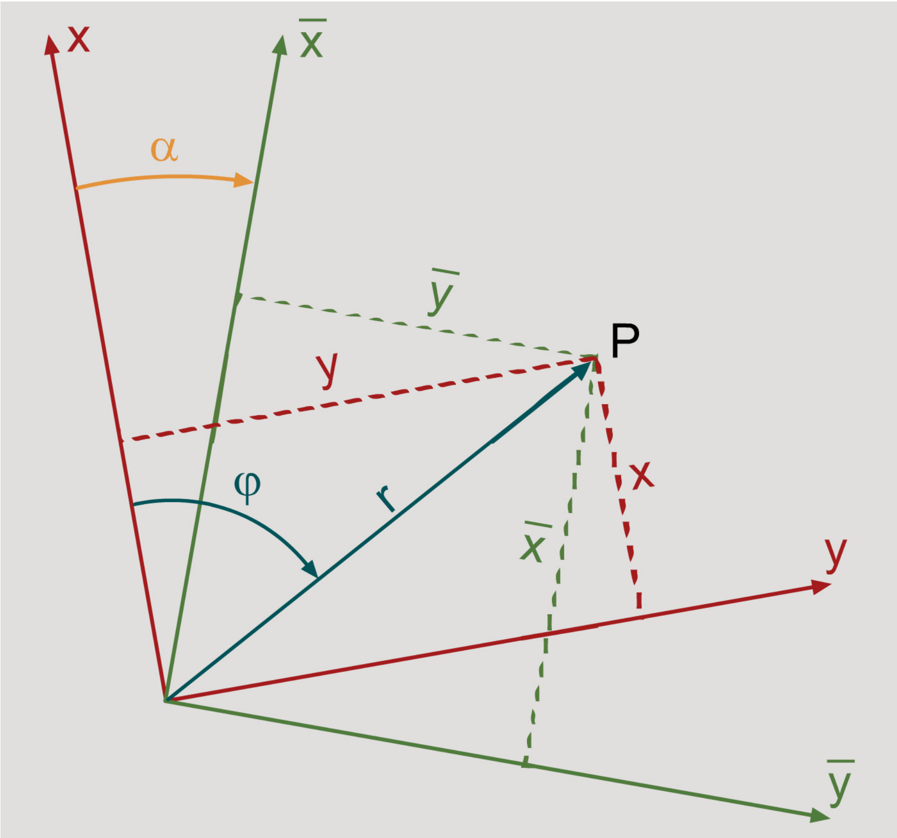
Transformation:

$$\vec{\bar{x}} = m \cdot \vec{x}$$

Transformation mit Maßstab und Translation:

$$\vec{\bar{x}} = \vec{\bar{x}}_0 + m \cdot \vec{x}$$

Transformationen Rotation



Kartesische Koordinaten (altes System):	x	y
Kartesische Koordinaten (neues System):	$\bar{x}$	$\bar{y}$
Polarkoordinaten:	r	φ
Rotation:	α	

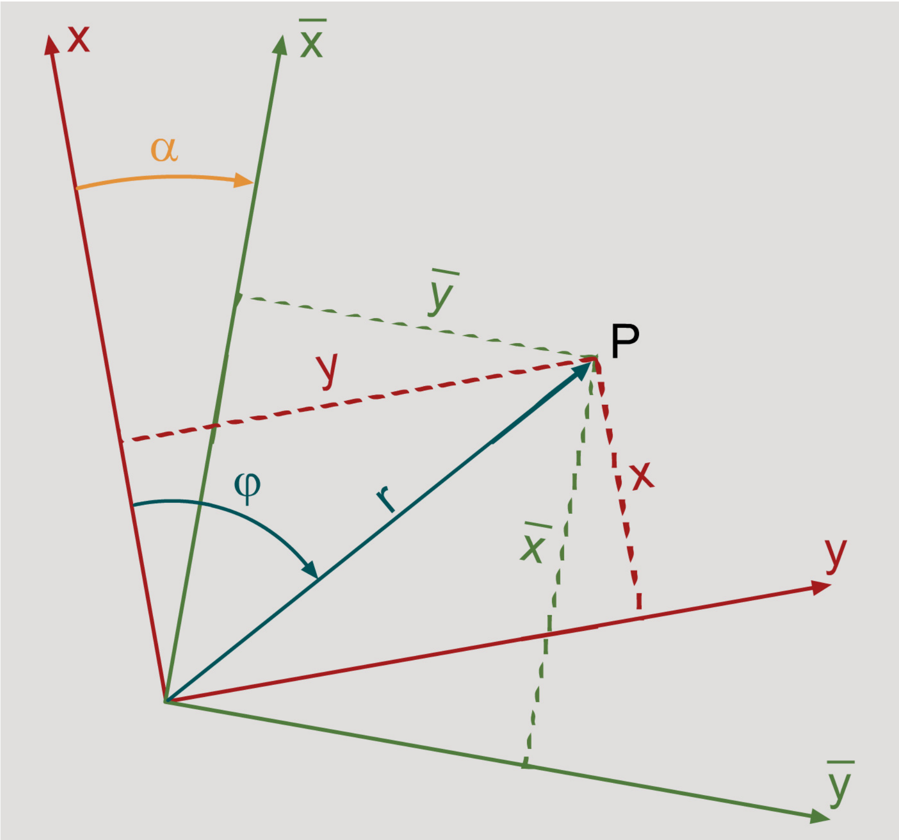
Umrechnung kart. Koo. <=> Polarkoo. altes System:

$x = r \cdot \cos\varphi$ $\quad$ $y = r \cdot \sin\varphi$

Umrechnung kart. Koo. <=> Polarkoo. neues System:

$\bar{x} = r \cdot \cos(\varphi - \alpha)$ $\quad$ $\bar{y} = r \cdot \sin(\varphi - \alpha)$

Transformationen Rotation



Additionstheoreme:

$$\bar{x} = r \cdot \cos\varphi \cdot \cos\alpha + r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\alpha$$

$$\bar{y} = r \cdot \sin\varphi \cdot \cos\alpha - r \cdot \cos\varphi \cdot \sin\alpha$$

=> $\bar{x} = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha$

=> $\bar{y} = y \cdot \cos\alpha - x \cdot \sin\alpha$

In Matrizenschreibweise:

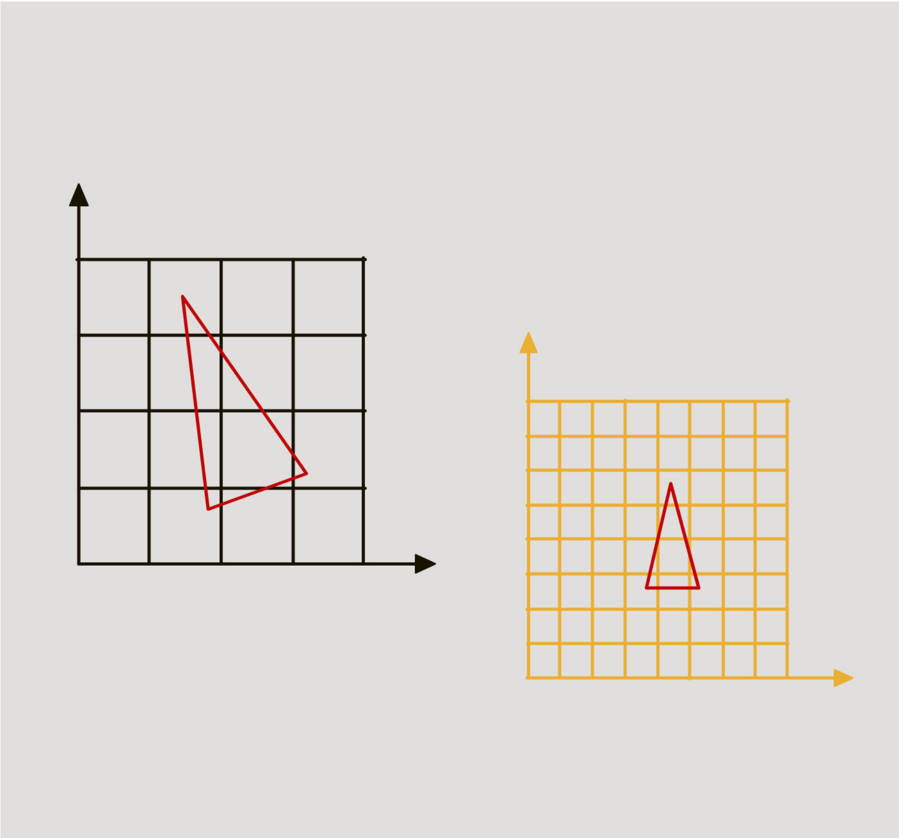
$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

oder

$\vec{\bar{x}} = R(\alpha) \cdot \vec{x}$ R: Rotationsmatrix

A 2x

Transformationen Ähnlichkeitstransformation



Kombination von Maßstab, Rotation und Translation

Parameter:

Maßstab: m

Rotation: α

Translation: x_0, y_0

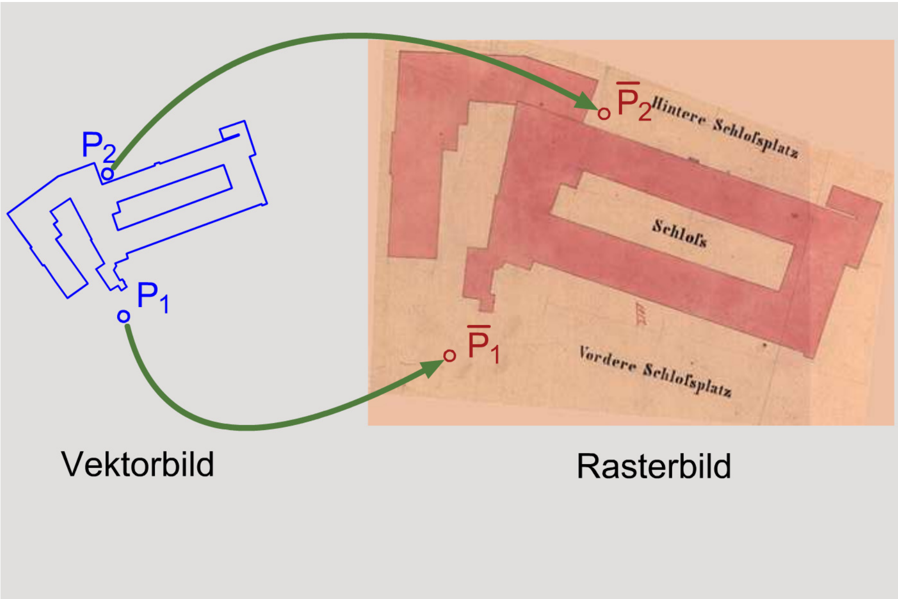
Aufgabe:

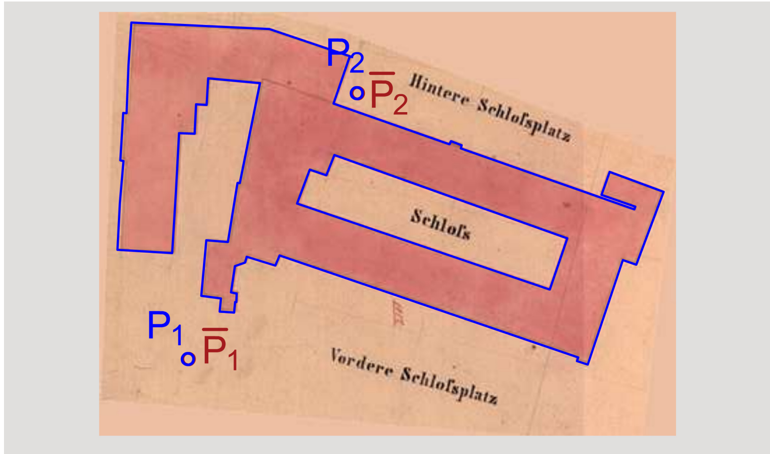
Bestimmung der Transf.-Parameter

3x

Transformationen Ähnlichkeitstransformation

Beispiel Planüberlagerung:





Beachte:

- Es müssen mindestens zwei Punkte in beiden Systemen koordinatenmäßig bekannt sein.
- Die Geometrie bleibt erhalten (unverzerrt).

Transformationen Ähnlichkeitstransformation

Lineares Gleichungssystem und Matrizenschreibweise:

$$\bar{x} = x_0 + m(x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha)$$
$$\bar{y} = y_0 + m(-x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

oder

$$\vec{\bar{x}} = \vec{x}_0 + m \cdot R \cdot \vec{x}$$

Substitution:

$o = -m \cdot \sin\alpha \qquad a = m \cdot \cos\alpha$

Transformationsgleichung:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -o \\ o & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

jetzt heißen die 4 Transf.-parameter:

x_0, y_0, o, a

Zusammenhang o, a, m, α :

$$m = \sqrt{o^2 + a^2}$$

$$\tan\alpha = -\frac{o}{a}$$

Transformationen Ähnlichkeitstransformation

1. Eindeutige Lösung:

Eindeutig, wenn genau zwei Punkte in beiden Systemen bekannt sind.

Ziel:

Herleitung von x_0, y_0 a, o

Identische Koordinaten

	altes System		neues System	
P_1	x_1	y_1	x_1	y_1
P_2	x_2	y_2	x_2	y_2

Transformationsgleichungen

4 Gleichungen mit 4 Unbekannten

1 $x_1 = x_0 + a \cdot x_1 - o \cdot y_1$

2 $y_1 = y_0 + o \cdot x_1 + a \cdot y_1$

3 $x_2 = x_0 + a \cdot x_2 - o \cdot y_2$

4 $y_2 = y_0 + o \cdot x_2 + a \cdot y_2$

3-1 und 4-2

$$x_2 - x_1 = a(x_2 - x_1) - o(y_2 - y_1)$$
$$y_2 - y_1 = o(x_2 - x_1) + a(y_2 - y_1)$$

Matrizenschreibweise

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_2 - x_1) & -(y_2 - y_1) \\ (y_2 - y_1) & (x_2 - x_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ o \end{pmatrix}$$

Transformationen Ähnlichkeitstransformation

nach a, o auflösen

$$\begin{pmatrix} a \\ o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_2 - x_1) & -(y_2 - y_1) \\ (y_2 - y_1) & (x_2 - x_1) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_2 - \bar{x}_1 \\ \bar{y}_2 - \bar{y}_1 \end{pmatrix}$$

Inverse einer 2x2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Determinante

$$\det \begin{pmatrix} (x_2 - x_1) & -(y_2 - y_1) \\ (y_2 - y_1) & (x_2 - x_1) \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = s_{1,2}^2$$

nach a, o aufgelöst

$$\begin{pmatrix} a \\ o \end{pmatrix} = \frac{1}{s_{1,2}^2} \begin{pmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) \\ -(y_2 - y_1) & (x_2 - x_1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_2 - \bar{x}_1 \\ \bar{y}_2 - \bar{y}_1 \end{pmatrix}$$

Parameter a, o, x_0, y_0

$$a = \frac{(x_2 - x_1)(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) + (y_2 - y_1)(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$o = \frac{(x_2 - x_1)(\bar{y}_2 - \bar{y}_1) - (y_2 - y_1)(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$x_0 = \bar{x}_1 - a \cdot x_1 + o \cdot y_1$$
$$y_0 = \bar{y}_1 - o \cdot x_1 - a \cdot y_1$$

Transformationen Helmerttransformation

2. Transformation mit mehr als zwei identischen Punkten:
Überbestimmte Ähnlichkeitstransf.

Vorteile:

- **Genauigkeitssteigerung**
- **Genauigkeitssangaben ("Restklaffungen")**
- **Möglichkeit grobe Fehler zu finden**
- **auch die identischen Punkte werden verbessert**

altes System	x_i	y_i
neues System	x_i	y_i
transform. Koo.	x_i'	y_i'

Restklaffungen:
Die Restklaffungen stellen die Abweichungen der identischen Punkte vor und nach der Transformation im neuen System dar.

$\xi_i' = x_i - x_i'$	$\eta_i' = y_i - y_i'$

Transformationen Helmerttransformation

Schwerpunkt:
Um numerisch günstigere Gleichungen zu bekommen. p=Anzahl der ident. Punkte.

$x_s = \frac{1}{p} \cdot \sum_{i=1}^{p} x_1$	$y_s = \frac{1}{p} \cdot \sum_{i=1}^{p} y_1$
$\bar{x}_s = \frac{1}{p} \cdot \sum_{i=1}^{p} \bar{x}_1$	$\bar{y}_s = \frac{1}{p} \cdot \sum_{i=1}^{p} \bar{y}_1$

"Schwerpunktverminderte" Koord:

$u_i = x_i - x_s$	$v_i = y_i - y_s$
$\bar{u}_i = \bar{x}_i - \bar{x}_s$	$\bar{v}_i = \bar{y}_i - \bar{y}_s$

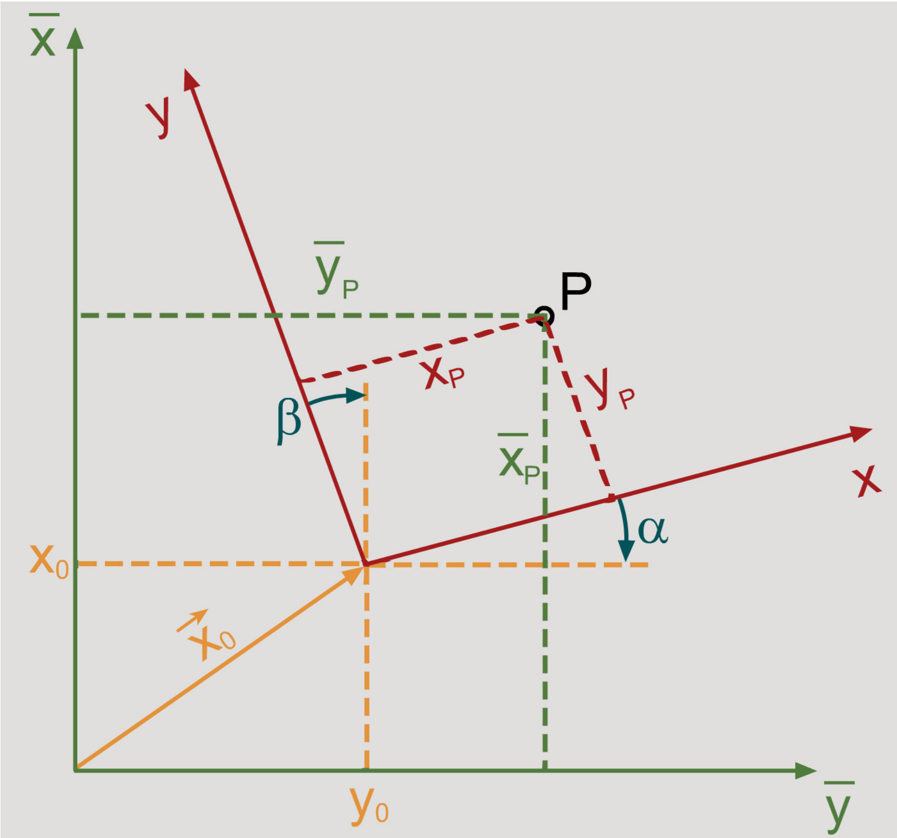
Die Transformationsparameter berechnen sich jetzt wie folgt:

$a = \frac{\sum_{1}^{p} (u_i \cdot \bar{u}_i + v_i \cdot \bar{v}_i)}{\sum_{1}^{p} (u_i^2 + v_i^2)}$	$o = \frac{\sum_{1}^{p} (u_i \cdot \bar{v}_i - v_i \cdot \bar{u}_i)}{\sum_{1}^{p} (u_i^2 + v_i^2)}$
$x_0 = \bar{x}_s - a \cdot x_s + o \cdot y_s$	$y_0 = \bar{y}_s - o \cdot x_s - a \cdot y_s$

Kontrolle:

$\sum \xi_i = 0$	$\sum \eta_i = 0$

Transformationen Affintransformation



Parameter:

2 Skalierungen:	m_x , m_y
2 Rotationen (Scherung):	α , β
2 Translationen:	x_0 , y_0

Transformationsformeln:

$$\bar{x} = a_0 + a_1 \cdot x + a_2$$

$$\bar{y} = b_0 + b_1 \cdot y + b_2$$

Beachte:

- Zur Bestimmung der 6 unbekannten Transformationsparameter müssen mindestens drei Punkte in beiden Systemen bekannt sein.
- Die Geometrie bleibt nicht erhalten (Verzerrung).

Transformationen Affintransformation

Bestimmung der Transformationsparameter aus den Koordinaten von drei homologen (identischen) Punkten:

$$a_0 = \bar{x}_i - x_i \cdot a_1 - y_i \cdot a_2$$

$$b_0 = \bar{y}_i - x_i \cdot b_1 - y_i \cdot b_2$$

$i \in \{1,2,3\}$ (Zur Kontrolle für alle Punkte berechnen)

$$a_1 = \frac{(y_3 - y_1)(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) - (y_2 - y_1)(\bar{x}_3 - \bar{x}_1)}{(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)}$$

$$a_2 = \frac{(x_2 - x_1)(\bar{x}_3 - \bar{x}_1) - (x_3 - x_1)(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}$$

$$b_1 = \frac{(y_3 - y_1)(\bar{y}_2 - \bar{y}_1) - (y_2 - y_1)(\bar{y}_3 - \bar{y}_1)}{(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)}$$

$$b_2 = \frac{(x_2 - x_1)(\bar{y}_3 - \bar{y}_1) - (x_3 - x_1)(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}$$