geoinformation.net

Projektpartner: Universität Karlsruhe - Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung
Datum: 04.09.2003

2. Koordinatensysteme

Einleitung

Um mit Daten arbeiten und um sie vergleichen zu können ist es notwendig, dass ihr Bezug zur Erdoberfläche bekannt ist. Die Position in einem Bezugssystem wird durch Koordinaten beschrieben, welche einem Koordinatensystem zugeordnet sind.

Im Folgenden wird in die Grundlage der Koordinatensysteme eingeführt. Anschließend werden verschiedene Koordinatensysteme erklärt und auf das Gauß-Krüger System, sowie das UTM-System näher eingegangen.

Inhalt

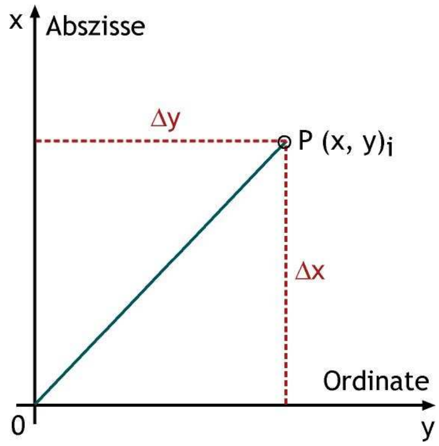
2. Koordinatensysteme
- 2.1 Grundlagen 2
  - 2.1.1 Winkel 2
  - 2.1.2 Richtungswinkel 3
  - 2.1.3 Nordrichtung 3
- 2.2 Koordinatensysteme auf der Kugel oder auf dem Ellipsoid 4
  - 2.2.1 geographische Koordinaten 4
  - 2.2.2 geozentrische Koordinaten 5
- 2.3 Koordinatensysteme in der Ebene 6
  - 2.3.1 Kartesisches Koordinatensystem 6
  - 2.3.2 Polarkoordinaten 6
  - 2.3.3 Umrechnung kartesische - polare Koordinaten 7
  - 2.3.4 Gauß-Krüger Koordinaten 8
  - 2.3.5 UTM-System 14
- 2.4 Literatur 15

Bundesministerium für Bildung und Forschung
Das Projekt Geoinformation - Neue Medien für die Einführung eines neuen Querschnittsfaches ist ein Projekt im Rahmen des BMBF-Programms Neue Medien in der Bildung.

zip Ein Projekt im Zukunftsinvestitionsprogramm der Bundesregierung
Das Projekt wird im Rahmen des Zukunftsinvestitions- programms der Bundesregierung (zip) gefördert.

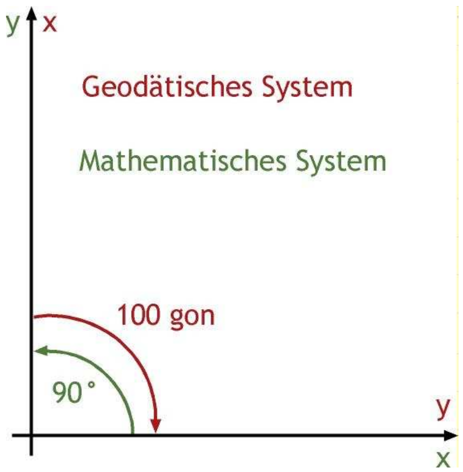
2.1 Grundlagen

Koordinaten sind Zahlenpaare, die die Lage eines Punktes auf einer Bezugsfläche beschreiben. Diese Zahlen können Winkel oder Längenmaße sein. Der einfachste Fall ist in folgender Abbildung dargestellt. In der Ebene definieren zwei Längenmaße x, y einen Punkt in einem rechtwinkligen Koordinatensystem.



2.1.1 Winkel

Während in der Mathematik ein linksdrehendes Koordinatensystem verwendet wird, verwendet man in der Geodäsie ein rechtsdrehendes System. Der Vollkreis wird im geodätischen Koordinatensystem von 0 bis 400 gon unterteilt, während in der Mathematik der Vollkreis 360° besitzt. In der Mathematik wird die Ordinate mit y, die Abszisse mit x bezeichnet; in der Geodäsie ist es umgekehrt.

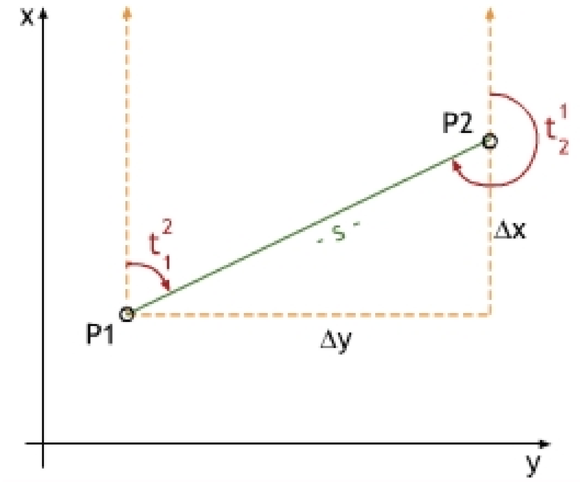


In diesem Lernmodul wird, um Missverständnisse zu vermeiden, durchgehend das geodätische System verwendet, welches auch in der Landesvermessung benutzt wird und damit auch den meisten Geodaten zugrunde liegt.

2.1.2 Richtungswinkel

Der rechtsdrehend (im Uhrzeigersinn) gemessene Winkel zwischen der Nordrichtung und einer durch zwei Punkte festgelegten Geraden wird als Richtungswinkel t bezeichnet. Es gilt:

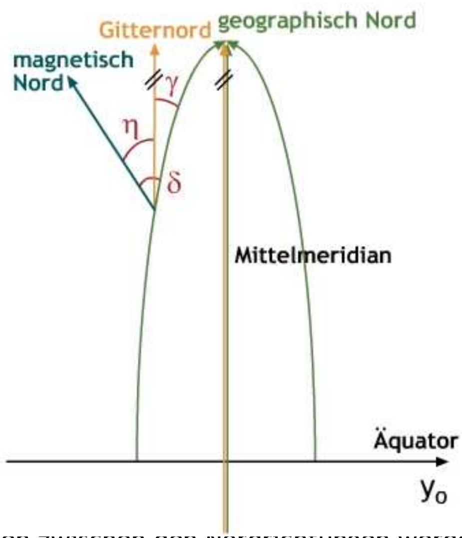
$$t_1^2 = t_2^1 \pm 200\,gon$$



2.1.3 Nordrichtung

Die Drehachse der Erde fällt nicht mit dem magnetischen Nordpol zusammen, sondern weicht von ihm ab. Man unterscheidet daher folgende Nordrichtungen:

- Gitternord (GiN)
  Richtung der Linien y = const. im Gauß-Krüger System (siehe Kapitel 2.3.4).
- Geographisch Nord
  Nordpol; Richtung, in die alle Meridiane zeigen.
- Magnetisch Nord
  Richtung einer frei schwebenden Kompaßnadel.



Nordrichtungen

Die Abweichungen zwischen den Nordrichtungen werden wie folgt beschrieben:

- **Meridiankonvergenz γ**
  Winkel zwischen GiN und geographisch Nord.
  $\gamma \approx (L - L_0) \cdot \sin B$

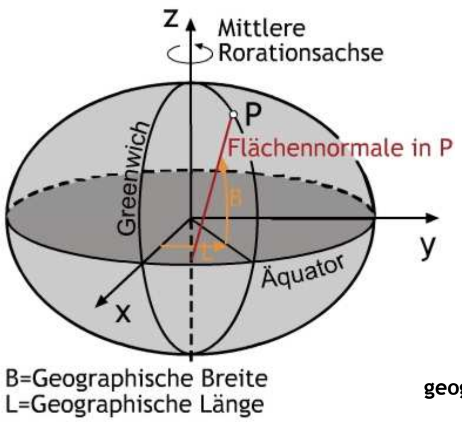
- **Deklination δ**
  Winkel zwischen magnetisch Nord und geographisch Nord.

- **Nadelabweichung η**
  Winkel zwischen magnetisch Nord und GiN.
  $\eta = \delta - \gamma$

2.2 Koordinatensysteme auf der Kugel oder auf dem Ellipsoid

2.2.1 geographische Koordinaten

Geographische Koordinaten bestehen aus zwei Winkelmaßen, die die Lage eines Punktes auf der Oberfläche festlegen.



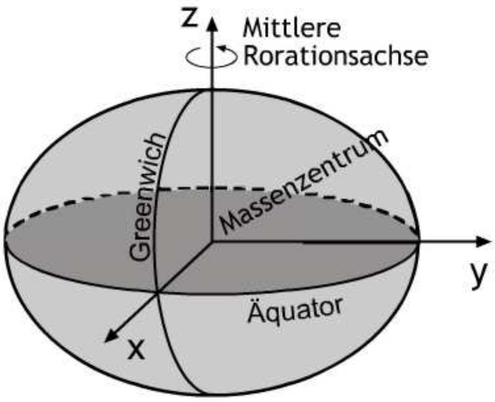
geographische Koordinaten

geographische Länge: Winkel zwischen der Ebene des Nullmeridian in Greenwich und der Meridianebene durch den Punkt P.

geographische Breite: Winkel zwischen der durch P verlaufenden Flächennormalen und der Äquatorebene.

2.2.2 geozentrische Koordinaten

Geozentrische Koordinaten bestehen aus 3 Längenmaßen, die die Lage im dreidimensionalen Raum beschreiben.



geozentrische Koordinaten

z-Achse: In Richtung der mittleren Rotationsachse.

y-Achse: In Richtung der Äquatorebene. Von Greenwich 90° in Richtung Ost.

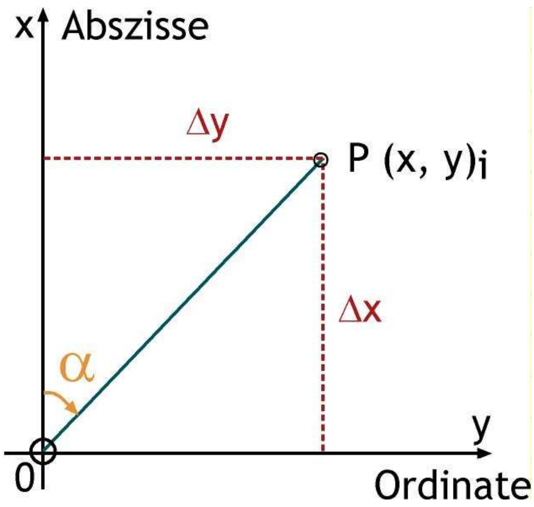
x-Achse: In Richtung der Äquatorebene durch den Nullmeridian in Greenwich.

Ursprung: Massenmittelpunkt des Systems.

2.3 Koordinatensysteme in der Ebene

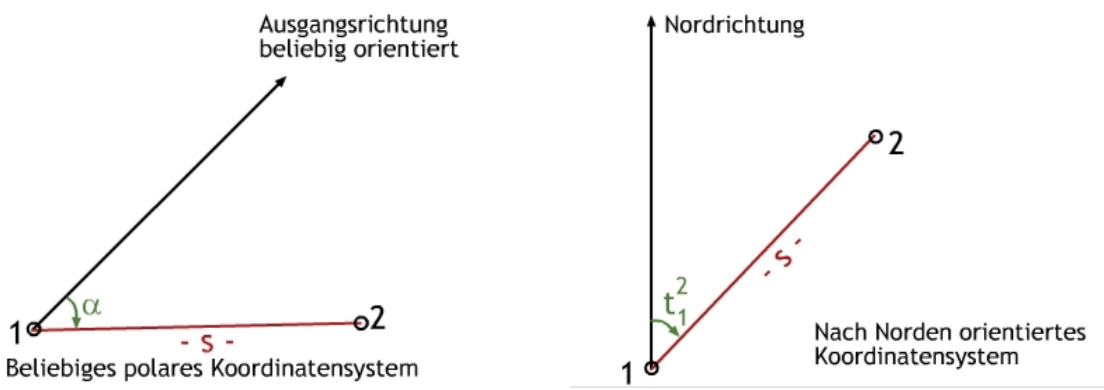
2.3.1 Kartesisches Koordinatensystem

Festlegung der Lage eines Punktes durch Angabe zweier Längenmaße x, y. Die Festlegung des Ursprungs, sowie der x-Achse ist frei wählbar. Die y-Achse steht senkrecht auf der x-Achse, sodass ein Rechts-System entsteht. Der Drehwinkel α wird im Uhrzeigersinn größer.



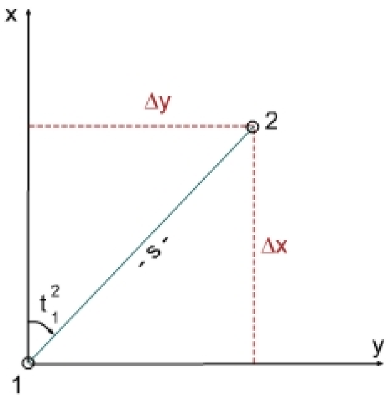
2.3.2 Polarkoordinaten

Polarkoordinaten bestehen aus einer Winkelangabe und einem Längenmaß. Die Ausgangsrichtung ist frei wählbar, ist aber oft nach Norden gerichtet. Der Winkel zwischen der Ausgangsrichtung und der Richtung zum Punkt P wird im Uhrzeigersinn größer. Ist die Nullrichtung nach Norden gerichtet, so spricht man vom Richtungswinkel t. Die Strecke wird vom Ursprung aus gezählt.



2.3.3 Umrechnung kartesische-polare Koordinaten

Die Umrechnung zwischen den Koordinatensystemen lässt sich leicht mit Hilfe der ebenen Trigonometrie durchführen.



Polarkoordinaten aus Kartesischen Koordinaten

$$s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\tan(t_1^2) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Kartesische Koordinaten aus Polarkoordinaten

$$\Delta x = s \cdot \cos(t_1^2)$$

$$\Delta y = s \cdot \sin(t_1^2)$$

(lies: „Richtungswinkel t von Punkt 1 nach Punkt 2“)

2.3.4 Gauß-Krüger Koordinaten

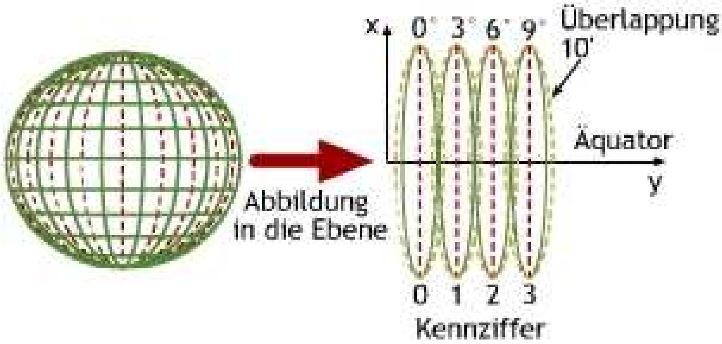
Die Rechnung auf dem Ellipsoid ist für lokale Anwendungen zu kompliziert und häufig auch unnötig. Deswegen überführt man die Koordinaten vom Ellipsoid in die Ebene.

Gesucht:
Ein Modell, welches die Erdoberfläche möglichst ähnlich auf die Ebene abbildet.

Problem:
Ohne Verzerrungen ist eine Abbildung von einer Kugel oder einem Ellipsoid in die Ebene nicht möglich. Ähnlichkeit lässt sich nur im Differentiellen, in kleinsten Teilen, erreichen.

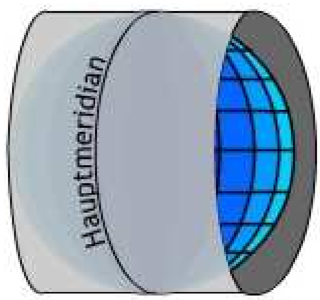
Lösung:
Die Ellipsoidoberfläche wird in einzelne Polzweiecke zerlegt. Diese *Meridianstreifen* können konform (winkeltreu) in die Ebene abgebildet werden (Gauß'sche winkeltreue Abbildung des Ellipsoids).

Praxis:
Alle 3° gibt es einen 4° breiten Streifen, sodass sie sich um 1° überlappen. Die Meridianstreifen werden mit den Kennziffern "Meridianstreifen/3" bezeichnet. Es ergeben sich so insgesamt 120 Steifen. In Deutschland liegen die Meridianstreifen bei 6°, 9°, 12° und 15° ö. L., bzw. bei den Kennziffern (KZ) 2 bis 5.

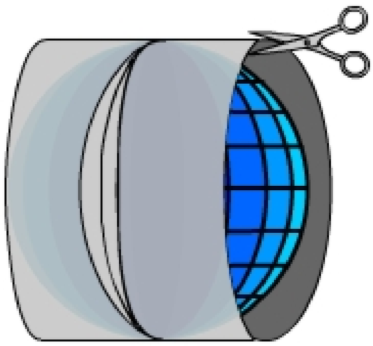


Wie kann man sich das vorstellen?

Die Gaußsche konforme Abbildung kann als eine ellipsoidische transversale Mercatorprojektion und näherungsweise als Zylinderprojektion (siehe Lernmodul Kartenprojektionen) angesehen werden. Der Zylinder berührt das Erdellipsoid im Hauptmeridian, der nach der Abwicklung des Zylinders in die Ebene längentreu abgebildet wird.



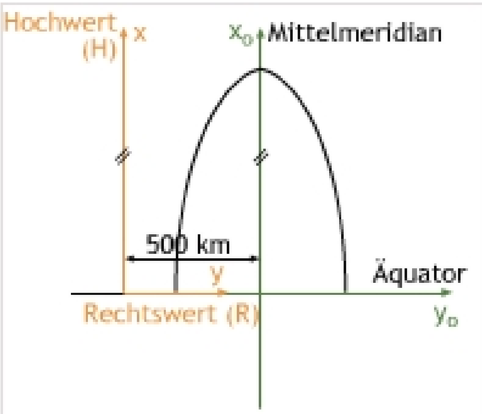
Das heißt, es wird ein Zylinder über das Erdellipsoid gestülpt, so dass der Hauptmeridian den Zylinder berührt. Es wird nun ein 3° breiter Streifen vom Erdzentrum aus auf den Zylinder projiziert. Zum Schluss wird der Zylinder "aufgeschnitten" und abgewickelt. So bekommt man einen Meridianstreifen in der Ebene.



Diesen Vorgang wiederholt man alle 3° und bekommt so 120 Streifen, die das Ellipsoid vollständig abdecken.

Definition von Gauß-Krüger Koordinaten:

- Bezugsebene (Abbildungsebene) liegt in Höhe h=0.
- y-Achse (Ordinate): Bild des Äquators; wird nach Osten größer.
- x-Achse (Abszisse): verläuft im Abstand von 500 km westlich zum geradlinigen Bild des Mittelmeridians; nach Norden positiv
  => Vermeidung negativer y-Werte.
- Hauptmeridian wird längentreu abgebildet.
- Streifenbreite 3°.



Koordinaten eines Punktes:

Die Koordinaten eines Punktes werden folgendermaßen erstellt.

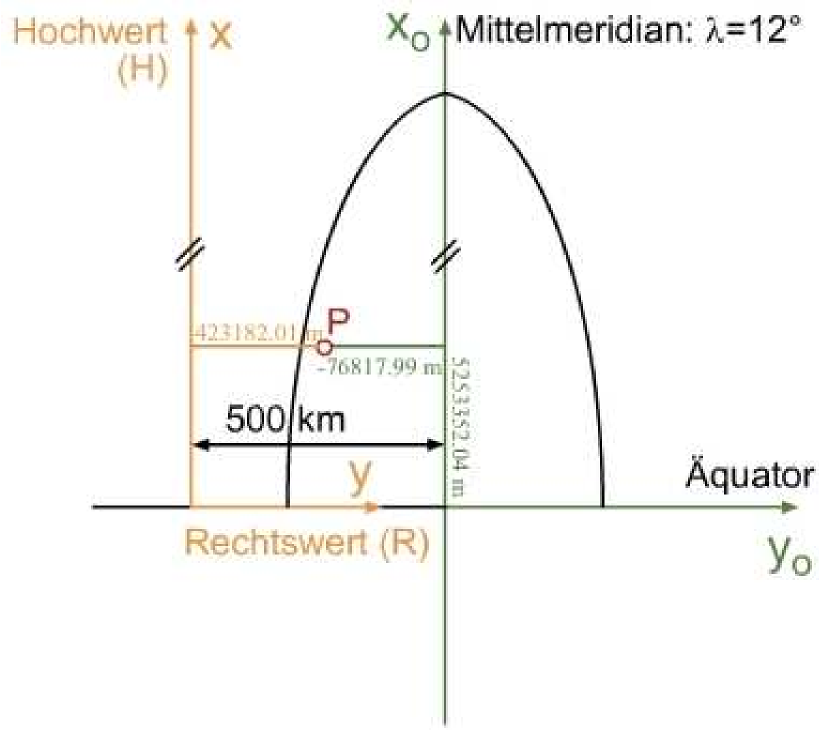
y-Wert:

- Abstand zum Mittelmeridian in [m]
- Addition von 500 km (= 500 000 m)
- Vorsetzen der Kennziffer (KZ)

x-Wert:

- Abstand zum Äquator in [m]

Beispiel:
Wie lauten die GK-Koordinaten der Zugspitze (Punkt P)?

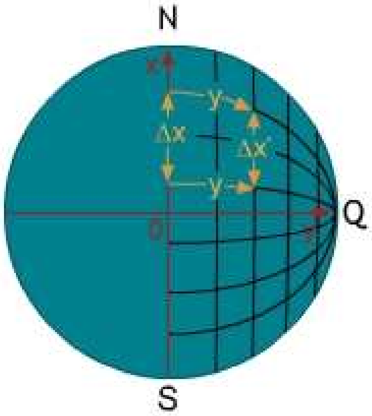


Lösung:

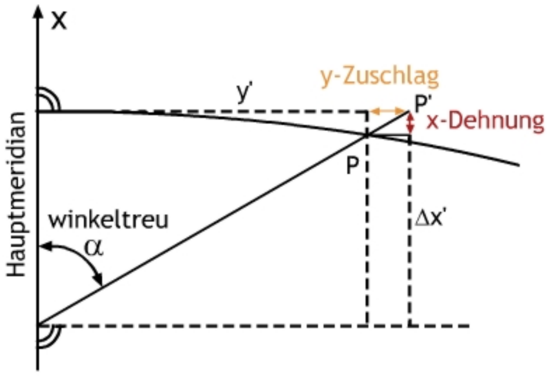
x (Hochwert)	5253352.04
y (Rechtswert) + =	-76817.99 500000.00 423182.01
Kennziffer 12°/3:	4
y (Rechtswert)	^{4}423182.01

Verbesserung in Folge von Abbildungsverzerrungen:

Bei ellipsoidischen Orthogonalkoordinaten konvergieren die Ordinaten untereinander mit zunehmenden Bogenlängen zum Querpol Q. Damit die Ordinaten in der Ebene parallel abgebildet werden, bekommen alle Abszissenunterschiede Δ x' die Länge Δ x auf dem Hauptmeridian. In den Gauß-Krüger Streifen treten ebenfalls diese Verzerrungen auf, weshalb Zuschläge angebracht werden müssen.



Bei der Gaußschen Abbildung des Ellipsoids treten keine Winkelverzerrungen auf, wohl aber Streckenverzerrungen.



x-Dehnung:
Dehnung von Δ x mit zunehmendem Abstand zum Hauptmeridian, damit Ordinaten parallel bleiben.

$$\Delta x = \Delta x' \cdot \frac{y^2}{2 \cdot r^2}$$ r = Erdradius

y-Zuschlag:
Ordinatenzuschlag, damit Winkeltreue gewahrt bleibt.

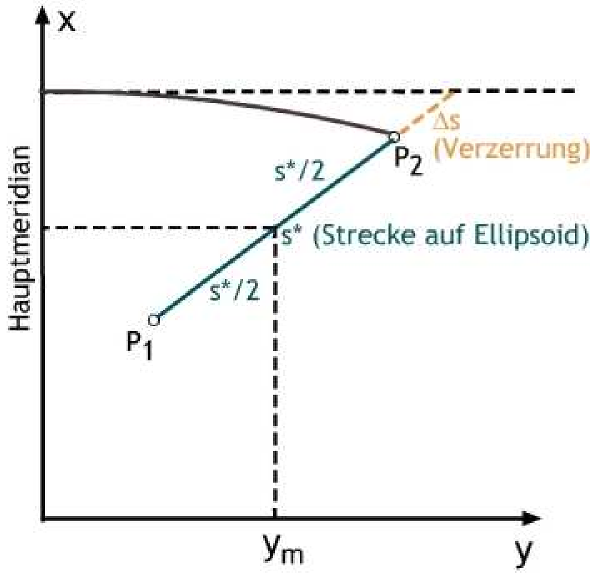
$$\Delta y = \Delta y' + \frac{y^3}{6 \cdot r^2}$$ r = Erdradius

Streckenverzerrung:
Vergrößerungsfaktor m für eine Strecke mit dem mittleren Abstand y_m vom Mittelmeridian:

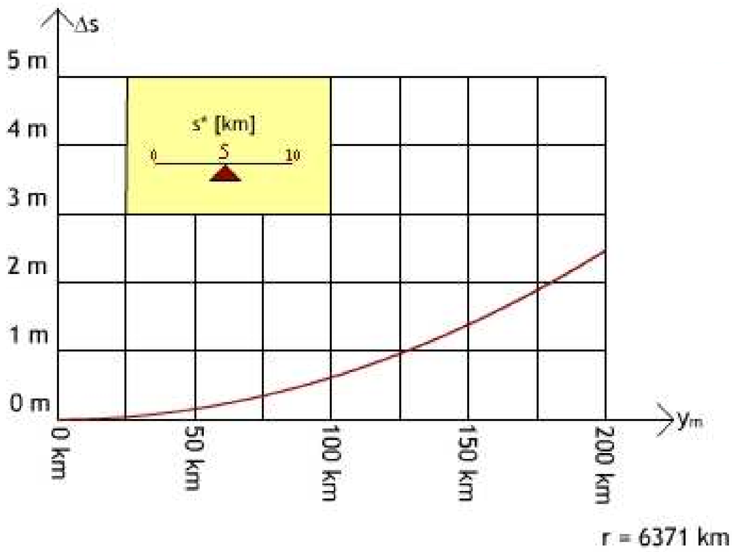
$$m = 1 + \frac{y_m^2}{2 \cdot r^2}$$

$$s = s^* + \Delta s = m \cdot s^*$$

=> $$\Delta s = \frac{s^* \cdot y_m^2}{2 \cdot r^2}$$ r = 6371 km



Streckenreduktion



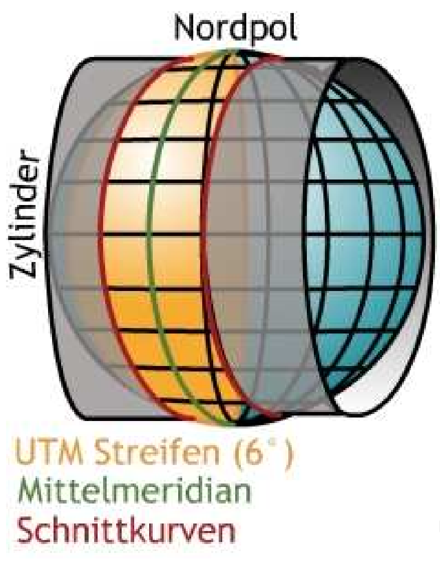
G-K Reduktion

2.3.5 UTM-System

Das Universal Transverse Mercator Grid System ist in seinem Aufbau dem G-K System sehr ähnlich. Die Meridianstreifen sind hier 6° breit und das System beruht auf dem Erdellipsoid nach Hayford. Die Verzerrungen halten sich dennoch in Grenzen, da bei der Zylinderabbildung der Zylinder das Ellipsoid nicht nur berührt, sondern an zwei Schnittstellen durchbricht. So wird nicht der Meridianstreifen längentreu abgebildet, sondern die zwei Schnittkuven. Der Mittelmeridian wird mit einem Maßstab von 0,9996 abgebildet, im Außenbereich beträgt er 1,00015. Die Zählung der Streifen, hier Zonen genannt, beginnt beim Mittelmeridian 177° westl. Länge, welcher die Kennziffer 1 hat und geht von West nach Ost bis zur Kennziffer 60 mit dem Mittelmeridian 177 östl. Länge. Deutschland liegt größtenteils in Zone 9 östlicher Länge mit der Kennziffer 32. Das System wird jedoch nur bis zu einer geographischen Breite von 80° angewandt, da die Meridianstreifen in Polnähe zu schmal werden. Die Polkappen werden in der Universalen Polaren Stereographischen Projektion (UPS) abgebildet, was eine echte konforme Projektion mit den Berührungsebenen in den Polen und den Projektionszentren in den jeweils gegenüberliegenden Polen darstellt.

Eigenschaften:

- Streifenbreite 6°
- Schnittkurven werden längentreu abgebildet.
- Die Zählung der Streifen, hier Zonen genannt, beginnt beim Mittelmeridian 177° westl. Länge.



UTM-System

2.4 Literatur

Heck, B. 1995: Rechenverfahren und Auswertemodelle der Landesvermessung : klassische und moderne Methoden. 2. Auflage Wichmann Verlag, Heidelberg.

Kahmen, H. 1997: Vermessungskunde. deGruyter Verlag, Berlin.

Schmidt, H. & Witte B. 2000: Vermessungskunde und Grundlagen der Statistik für das Bauwesen. Wittwer Verlag, Stuttagrt.

Torge, W. 1975: Geodäsie. deGruyter Verlag, Berlin.